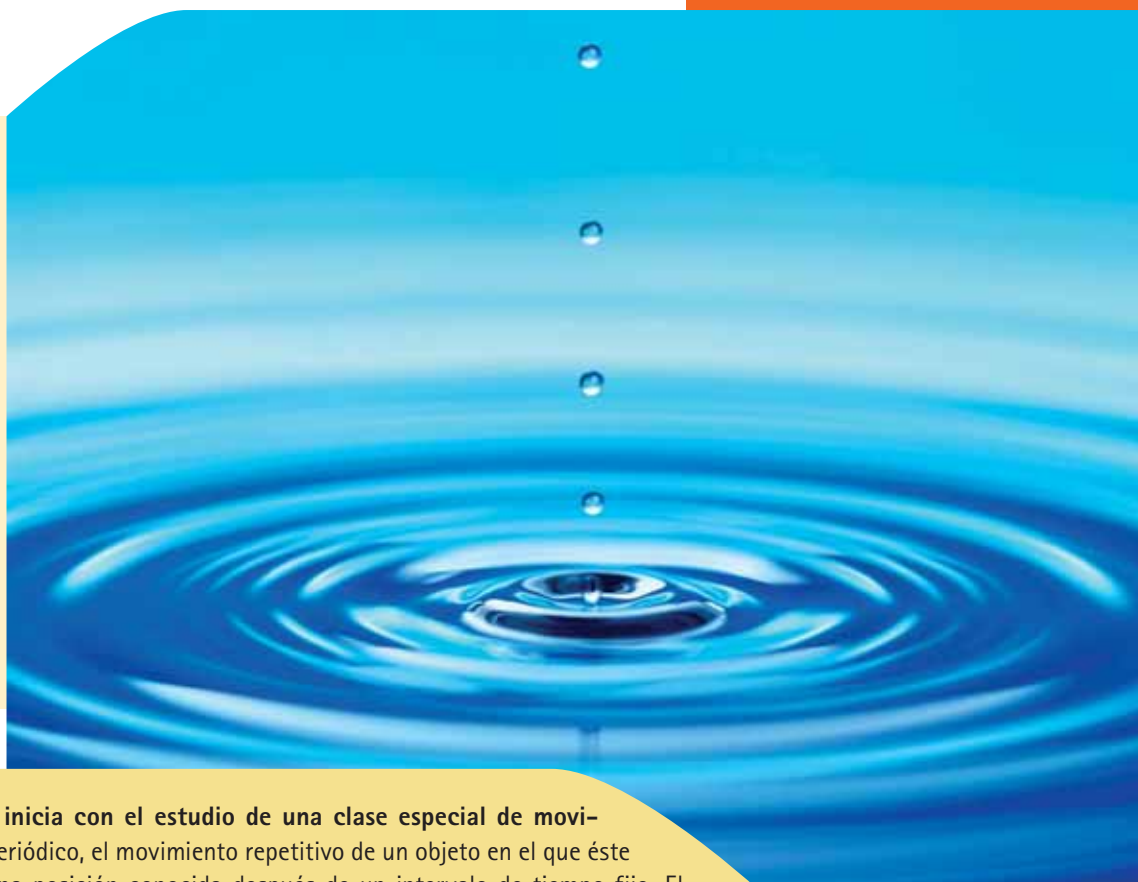


Oscilaciones y ondas mecánicas

P A R T E 2

Las gotas de agua que caen hacen que la superficie de agua oscile. Estas oscilaciones se asocian con ondas circulares que se alejan del punto en el cual caen las gotas. En la segunda parte del texto exploraremos los principios relacionados con oscilaciones y ondas. (Marga Buschbell Steeger/Photographer's Choice/Getty Images)



Esta nueva parte del texto inicia con el estudio de una clase especial de movimiento llamado movimiento periódico, el movimiento repetitivo de un objeto en el que éste permanece para regresar a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. El movimiento repetitivo de tal objeto se llama *oscilación*. La atención se concentrará en un caso especial de movimiento periódico llamado *movimiento armónico simple*. Todos los movimientos periódicos se representan como combinaciones de movimientos armónicos simples.

El movimiento armónico simple también forma la base para comprender las *ondas mecánicas*. Las ondas sonoras, las ondas sísmicas, las ondas sobre cuerdas estiradas y las ondas en el agua son producidas por alguna fuente de oscilación. A medida que una onda sonora viaja a través del aire, elementos del aire oscilan de atrás para adelante; conforme una onda en el agua viaja a través de un estanque, los elementos del agua oscilan arriba y abajo y hacia atrás y hacia adelante. El movimiento de los elementos conduce a una marcada similitud con el movimiento periódico de un péndulo oscilante o un objeto unido a un resorte.

Para explicar muchos otros fenómenos en la naturaleza, se deben comprender los conceptos de oscilaciones y ondas. Por ejemplo, aunque los rascacielos y puentes parecen rígidos, en realidad oscilan, algo que deben tomar en consideración los arquitectos e ingenieros que los diseñan y construyen. Para entender cómo funcionan la radio y la televisión, debe comprender el origen y naturaleza de las ondas electromagnéticas y cómo se propagan a través del espacio. Por último, mucho de lo que han aprendido los científicos acerca de la estructura atómica viene de información aportada por las ondas. En consecuencia, primero debe estudiar las oscilaciones y las ondas si quiere comprender los conceptos y teorías de la física atómica. ■

Movimiento oscilatorio

- 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte
- 15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple
- 15.3 Energía del oscilador armónico simple
- 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme
- 15.5 El péndulo
- 15.6 Oscilaciones amortiguadas
- 15.7 Oscilaciones forzadas



El Puente del Milenio sobre el río Támesis, en Londres. El día de la inauguración del puente los peatones observaron un movimiento del puente, por lo que lo llamaron el "puente tembleque". El puente fue cerrado después de dos días y permaneció cerrado durante dos años. Se agregaron al puente más de 50 amortiguadores de masa sincronizados: los pares de estructuras con resorte en la parte superior de los travesaños (flecha). Estudiaremos tanto oscilaciones como amortiguamiento de oscilaciones en este capítulo. (*Monkey Business Images/Shutterstock.com*)

En el movimiento periódico el objeto regresa regularmente a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. Al reflexionar es posible identificar muchas clases de movimiento periódico en la vida cotidiana. Su automóvil regresa al camino cada tarde. Usted regresa a la mesa del comedor cada noche para cenar. Si empuja un candelabro lo balancea de atrás para adelante y regresa a la misma posición con una rapidez uniforme. La Tierra regresa a la misma posición en su órbita alrededor del Sol cada año, lo que resulta en la variación entre las cuatro estaciones.

Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama *movimiento armónico simple*, que es el punto central de interés de este capítulo.

15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Como un modelo de movimiento armónico simple considere un bloque de masa m unido al extremo de un resorte, con el bloque libre de moverse sobre una superficie

horizontal sin fricción (figura 15.1). Cuando el resorte no está estirado ni comprimido el bloque queda en reposo, en la posición llamada *posición de equilibrio* del sistema, que se identifica como $x = 0$ (figura 15.1b). Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio.

Se puede entender cualitativamente el movimiento oscilatorio del bloque en la figura 15.1 al recordar primero que, cuando el bloque se desplaza a una posición x , el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y está dada por la **ley de Hooke** (vea la sección 7.4):

$$F_s = -kx \quad (15.1)$$

A F_s se le llama **fuerza restauradora** porque siempre se dirige hacia la posición de equilibrio y, en consecuencia, es *opuesta* al desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Es decir, cuando el bloque se desplaza hacia la derecha de $x = 0$ en la figura 15.1a, la posición es positiva y la fuerza restauradora se dirige hacia la izquierda. Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de $x = 0$, como en la figura 15.1c, la posición es negativa y la fuerza restauradora se dirige hacia la derecha.

Cuando el bloque es desplazado desde el punto de equilibrio y se suelta, éste es una partícula bajo una fuerza neta y, en consecuencia, experimenta una aceleración. Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del bloque, con la ecuación 15.1 que proporciona la fuerza neta en la dirección x , se obtiene

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \rightarrow -kx = ma_x \\ a_x &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \quad (15.2)$$

Es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su posición, y la dirección de la aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Se dice que los sistemas que se comportan de esta forma exhiben **movimiento armónico simple**. Un objeto se mueve con movimiento armónico simple siempre que su aceleración es proporcional a su posición y se dirige en sentido opuesto al desplazamiento desde el equilibrio.

Si el bloque en la figura 15.1 se desplaza a una posición $x = A$ y se libera desde el reposo, su aceleración *inicial* es $-kA/m$. Cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$, su aceleración es cero. En este instante su rapidez es un máximo, porque la aceleración cambia de signo. Por lo tanto, el bloque continúa viajando hacia la izquierda del equilibrio con una aceleración positiva y al final llega a $x = -A$, momento en el que su aceleración es $+kA/m$ y su rapidez de nuevo es cero, como se explicó en las secciones 7.4 y 7.9. El bloque termina un ciclo completo de su movimiento cuando regresa a la posición original y una vez más pasa por $x = 0$ con rapidez máxima. En consecuencia, el bloque oscila entre los puntos de retorno $x = \pm A$. En ausencia de fricción este movimiento idealizado continuará por siempre

◀ Ley de Hooke

Prevención de riesgos ocultos 15.1

La orientación del resorte La figura 15.1 muestra un resorte *horizontal* con un bloque unido que se desliza sobre una superficie sin fricción. Otra posibilidad es un bloque que cuelga de un resorte *vertical*. Todos los resultados que se explican para el resorte horizontal son los mismos para el resorte vertical, con una excepción: cuando el bloque se coloca en el resorte vertical, su peso hace que el resorte se extienda. Si la posición de reposo del bloque se define como $x = 0$, los resultados de este capítulo también se aplican a este sistema vertical.

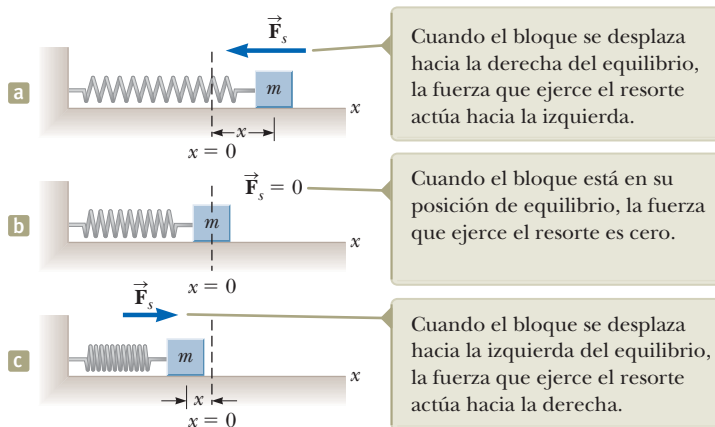


Figura 15.1 Un bloque unido a un resorte móvil sobre una superficie sin fricción.

porque la fuerza que ejerce el resorte es conservativa. Por lo general, los sistemas reales están sujetos a fricción, así que no oscilan por siempre. En la sección 15.6 se explorarán los detalles de la situación con la fricción.

E **xamen rápido 15.1** Un bloque en el extremo de un resorte se jala a la posición $x = A$ y se libera desde el reposo. En un ciclo completo de su movimiento, ¿qué distancia total recorre? (a) $A/2$, (b) A , (c) $2A$, (d) $4A$.

15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple

El movimiento descrito en la sección precedente se presenta con tanta frecuencia que se considera el modelo de **partícula en movimiento armónico simple** para representar tales situaciones. Para desarrollar una representación matemática para este modelo, por lo general se elegirá x como el eje a lo largo del que se presenta la oscilación; por eso, en esta explicación se eliminará la notación de subíndice x . Recuerde que, por definición, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, y así la ecuación 15.2 se puede expresar como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (15.3)$$

Si la razón k/m se indica con el símbolo ω^2 (se elige ω^2 en lugar de ω para que la solución que se desarrolle a continuación sea más simple en forma), entonces

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (15.4)$$

y la ecuación 15.3 se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (15.5)$$

Ahora encuentre una solución matemática a la ecuación 15.5, esto es, una función $x(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden y sea una representación matemática de la posición de la partícula como función del tiempo. Se busca una función cuya segunda derivada sea la misma que la función original con un signo negativo y multiplicada por ω^2 . Las funciones trigonométricas seno y coseno muestran este comportamiento, así que se puede construir una solución alrededor de una de ellas o de ambas. La función coseno que aparece enseguida es una solución a la ecuación diferencial:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.6)$$

donde A , ω y ϕ son constantes. Para mostrar explícitamente que esta solución satisface la ecuación 15.5, note que

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (15.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.8)$$

Al comparar las ecuaciones 15.6 y 15.8, es claro que $d^2x/dt^2 = -\omega^2x$ satisface la ecuación 15.5.

Los parámetros A , ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar un significado físico a dichas constantes es conveniente formar una representación del movimiento al graficar x como función de t , como en la figura 15.2a. Primero, A , llamada la **amplitud** del movimiento, es simplemente el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x positiva o negativa. La constante ω se llama *frecuencia*

Prevención de riesgos ocultos 15.2

Una aceleración no constante

La aceleración de una partícula en movimiento armónico simple no es constante. La ecuación 15.3 muestra que su aceleración varía con la posición x . Por lo tanto, en esta situación *no se pueden* aplicar las ecuaciones de cinemática del capítulo 2.

Posición contra tiempo para una partícula en movimiento armónico simple

Prevención de riesgos ocultos 15.3

¿Dónde está el triángulo?

La ecuación 15.6 incluye una función trigonométrica, una *función matemática* que se puede usar ya sea que se refiera o no a un triángulo. En este caso sucede que la función coseno tiene el comportamiento correcto para representar la posición de una partícula en movimiento armónico simple.

angular y tiene unidades¹ de rad/s. Es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras más oscilaciones por unidad de tiempo haya, más alto es el valor de ω . A partir de la ecuación 15.4 la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15.9)$$

El ángulo constante ϕ se llama **constante de fase** (o ángulo de fase inicial) y, junto con la amplitud A , se determina de manera unívoca por la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$. Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\phi = 0$ y la representación gráfica del movimiento es como se muestra en la figura 15.2b. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama la **fase** del movimiento. Observe que la función $x(t)$ es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt aumenta en 2π radianes.

Las ecuaciones 15.1, 15.5 y 15.6 forman la base de la representación matemática de la partícula en el modelo de movimiento armónico simple. Si usted analiza una situación y encuentra que la fuerza sobre una partícula tiene la forma matemática de la ecuación 15.1, usted sabrá que el movimiento es de un oscilador armónico simple y la posición de la partícula la describe la ecuación 15.6. Si analiza un sistema y logra su descripción mediante una ecuación diferencial de la forma de la ecuación 15.5, el movimiento es el de un oscilador armónico simple. Si analiza una situación y ubica la posición de una partícula mediante la ecuación 15.6, sabrá que la partícula experimenta un movimiento armónico simple.

E xamen rápido 15.2 Considere una representación gráfica (figura 15.3) de movimiento armónico simple, como se describe matemáticamente en la ecuación 15.6. Cuando el objeto está en el punto **A** de la gráfica, ¿qué puede decir acerca de su posición y velocidad? (a) La posición y velocidad son positivas. (b) La posición y velocidad son negativas. (c) La posición es positiva y su velocidad es cero. (d) La posición es negativa y su velocidad es cero. (e) La posición es positiva y su velocidad es negativa. (f) La posición es negativa y su velocidad es positiva.

E xamen rápido 15.3 La figura 15.4 muestra dos curvas que representan el movimiento armónico simple al que se someten dos partículas. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple de la partícula B es, (a) de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A, (b) de mayor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A, (c) de menor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A o (d) de menor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A.

Investigue un poco más la descripción matemática del movimiento armónico simple. El **periodo** T del movimiento es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento (figura 15.2a). Es decir, los valores de x y v para la partícula en el tiempo t son iguales a los valores de x y v en el tiempo $t + T$. Ya que la fase aumenta en 2π radianes en un intervalo de tiempo de T ,

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

Al simplificar esta expresión se obtiene $\omega T = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (15.10)$$

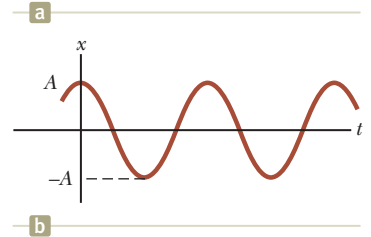
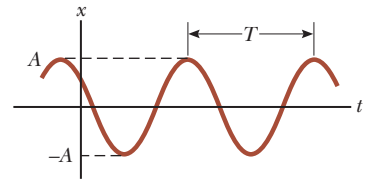


Figura 15.2 (a) Gráfica $x-t$ para una partícula que experimenta un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A , el periodo (definido en la ecuación 15.10) es T . (b) Gráfica $x-t$ en el caso especial en que $x = A$ en $t = 0$ y por eso $\phi = 0$.

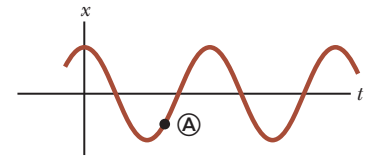
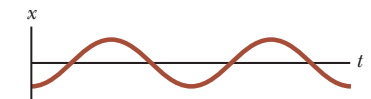
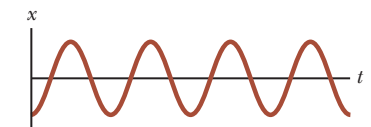


Figura 15.3 (Examen rápido 15.2) Gráfica $x-t$ para una partícula experimentando un movimiento armónico simple. En un tiempo particular, la posición de la partícula se indica por **A** en la gráfica.



Partícula A



Partícula B

Figura 15.4 (Examen rápido 15.3) Dos gráficas $x-t$ para partículas experimentando movimiento armónico simple. Las amplitudes y frecuencias son diferentes para las dos partículas.

¹En capítulos anteriores se vieron muchos ejemplos en los que se evalúa una función trigonométrica de un ángulo. El argumento de una función trigonométrica, como seno o coseno, *debe* ser un número puro. El radián es un número puro porque es un cociente de longitudes. Los ángulos en grados son números puros porque el grado es una "unidad" artificial; no se relaciona con mediciones de longitudes. El argumento de la función trigonométrica de la función en la ecuación 15.6 debe ser un número puro. Por lo tanto, ω *debe* expresarse en rad/s (y no, por ejemplo, en revoluciones por cada segundo) si t se expresa en segundos. Además, otros tipos de funciones, como las funciones logarítmicas y exponenciales, requieren argumentos que son números puros.

Prevención de riesgos ocultos 15.4

Dos tipos de frecuencia Se identifican dos tipos de frecuencia para un oscilador armónico simple: f , llamada simplemente *frecuencia*, se mide en hertz y ω , la *frecuencia angular*, se mide en radianes por segundo. Asegúrese de tener claridad acerca de cuál frecuencia se discute o solicita en un problema determinado. Las ecuaciones 15.11 y 15.12 muestran la relación entre las dos frecuencias.

El inverso del periodo se llama **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo de tiempo por oscilación, la frecuencia representa el número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (15.11)$$

Las unidades de f son ciclos por segundo, o **hertz** (Hz). Al reordenar la ecuación 15.11 se obtiene

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (15.12)$$

Las ecuaciones de la 15.9 a la 15.11 se usan para expresar el periodo y la frecuencia del movimiento para la partícula en movimiento armónico simple en términos de las características m y k del sistema como

Periodo ►

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (15.13)$$

Frecuencia ►

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15.14)$$

De este modo, el periodo y la frecuencia dependen *solamente* de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y *no* de los parámetros del movimiento, como A o ϕ . Como es de esperar, la frecuencia es mayor para un resorte más rígido (mayor valor de k) y disminuye con la masa creciente de la partícula.

Es posible obtener la velocidad y la aceleración² de una partícula sometida a movimiento armónico simple a partir de las ecuaciones 15.7 y 15.8:

Velocidad de una partícula en movimiento armónico simple ►

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (15.15)$$

Aceleración de una partícula en movimiento armónico simple ►

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.16)$$

A partir de la ecuación 15.15 se ve que, puesto que las funciones seno y coseno oscilan entre ± 1 , los valores extremos de la velocidad v son $\pm\omega A$. Del mismo modo, la ecuación 15.16 muestra que los valores extremos de la aceleración a son $\pm\omega^2 A$. En consecuencia, los valores *máximos* de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

Magnitudes máximas de la velocidad y aceleración en movimiento armónico simple ►

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \quad (15.17)$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A \quad (15.18)$$

La figura 15.5a grafica la posición contra el tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. En las figuras 15.5b y 15.5c se ilustran respectivamente las curvas asociadas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo. Las cuales muestran que la fase de la velocidad difiere de la fase de la posición en $\pi/2$ rad o 90° . Es decir: cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. Del mismo modo, cuando x es cero, la rapidez es un máximo. Además, observe que la fase de la aceleración difiere de la fase de la posición en π radianes o 180° . Por ejemplo, cuando x es un máximo, a tiene una magnitud máxima en la dirección opuesta.

²Ya que el movimiento de un oscilador armónico simple tiene lugar en una dimensión, la velocidad se indica como v y la aceleración como a , con la dirección indicada mediante un signo positivo o negativo, como en el capítulo 2.

Examen rápido 15.4 Un objeto de masa m cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como T . El objeto de masa m se retira y se sustituye con un objeto de masa $2m$. Cuando este objeto se pone en oscilación, ¿cuál es el periodo del movimiento? (a) $2T$, (b) $\sqrt{2} T$, (c) T , (d) $T/\sqrt{2}$, (e) $T/2$.

La ecuación 15.6 describe el movimiento armónico simple de una partícula en general. Ahora vea cómo evaluar las constantes del movimiento. La frecuencia angular ω se evalúa con la ecuación 15.9. Las constantes A y ϕ se evalúan a partir de las condiciones iniciales, es decir, del estado del oscilador en $t = 0$.

Suponga que la partícula se pone en movimiento al jalarla desde el equilibrio una distancia A y liberarla desde el reposo en $t = 0$, como en la figura 15.6. Después se deben requerir soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ (ecuaciones 15.6 y 15.15) para obedecer las condiciones iniciales $x(0) = A$ y $v(0) = 0$:

$$\begin{aligned}x(0) &= A \cos \phi = A \\v(0) &= -\omega A \sin \phi = 0\end{aligned}$$

Estas condiciones se satisfacen si $\phi = 0$, lo que da $x = A \cos \omega t$ como solución. Si busca comprobar esta solución, note que satisface la condición $x(0) = A$ porque $\cos 0 = 1$.

La posición, velocidad y aceleración con el tiempo se grafican en la figura 15.7a para este caso especial. La aceleración alcanza valores extremos de $\mp \omega^2 A$ cuando la posición tiene valores extremos de $\pm A$. Además, la velocidad tiene valores extremos de $\pm \omega A$, que se presentan en $x = 0$. Por lo tanto, la solución cuantitativa concuerda con la descripción cualitativa de este sistema.

Considere otra posibilidad. Suponga que el sistema oscila y se define $t = 0$ como el instante cuando la partícula pasa a través de la posición no estirada del resorte mientras se mueve a la derecha (figura 15.8). En este caso, las soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ deben obedecer las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$:

$$\begin{aligned}x(0) &= A \cos \phi = 0 \\v(0) &= -\omega A \sin \phi = v_i\end{aligned}$$

La primera de estas condiciones dice que $\phi = \pm \pi/2$. Con estas opciones para ϕ , la segunda condición dice que $A = \mp v_i/\omega$. Ya que la velocidad inicial es positiva y la amplitud es positiva, se debe tener $\phi = -\pi/2$. En consecuencia, la solución es

$$x = \frac{v_i}{\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para esta opción de $t = 0$ se muestran en la figura 15.7b. Note que estas curvas son las mismas que en la figura 15.7a, pero desplazadas a la derecha en un cuarto de ciclo. Este corrimiento

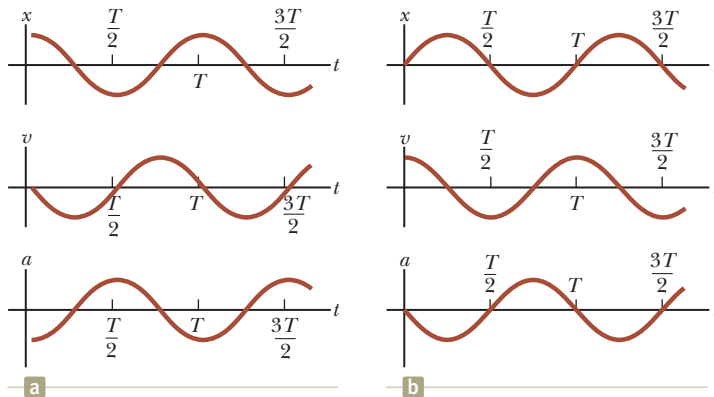


Figura 15.7 (a) Posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para el bloque de la figura 15.6 bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = A$ y $v(0) = 0$. (b) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para el bloque de la figura 15.8 bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$.

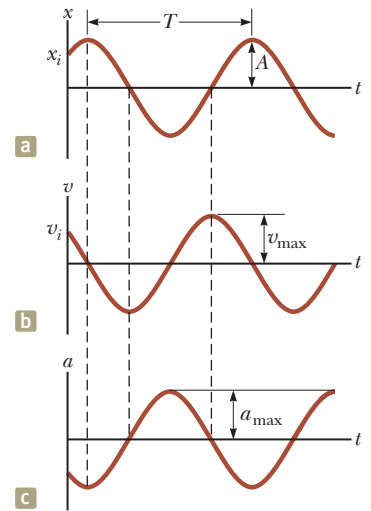


Figura 15.5 Representación gráfica de movimiento armónico simple. (a) Posición contra tiempo. (b) Velocidad contra tiempo. (c) Aceleración contra tiempo. Note que en cualquier tiempo especificado la velocidad está 90° fuera de fase con la posición y la aceleración está 180° fuera de fase con la posición.

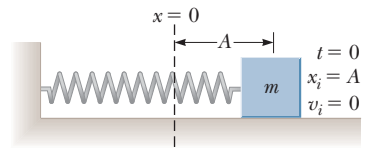


Figura 15.6 Un sistema bloque-resorte que inicia su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$.

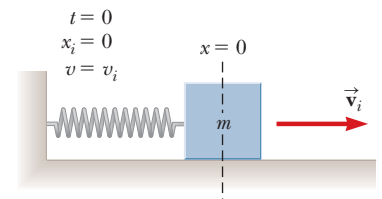


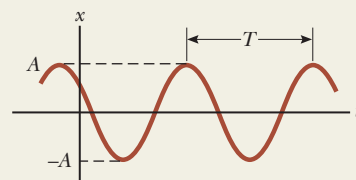
Figura 15.8 El sistema bloque-resorte experimentando oscilaciones y en $t = 0$ se define en un instante cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con rapidez v_i .

se describe matemáticamente por la constante de fase $\phi = -\pi/2$, que es un cuarto de ciclo completo de 2π .

Análisis de modelo Partícula en movimiento armónico simple

Imagine un objeto que está sujeto a una fuerza que es proporcional al negativo de la posición del objeto, $F = -kx$. Esta ecuación de fuerza se conoce como la ley de Hooke y describe la fuerza aplicada a un objeto unido a un resorte ideal. El parámetro k de la ley de Hooke se llama la *constante elástica* o *constante de fuerza*. La posición de un objeto actuado sobre una fuerza descrita por la ley de Hooke está dada por

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.6)$$



donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. Los valores de A y ϕ dependen de la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

El **periodo** de la oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (15.13)$$

y el inverso del periodo es la **frecuencia**.

Ejemplos:

- un saltador de bungee cuelga de una cuerda y oscila hacia arriba y abajo
- una cuerda de guitarra vibra hacia adelante y atrás en una onda estacionaria, con cada elemento de la cuerda moviéndose en movimiento armónico simple (capítulo 18)
- un pistón en un motor de gasolina oscila hacia arriba y hacia abajo dentro del cilindro del motor (capítulo 22)
- un átomo en una molécula diatómica vibra hacia adelante y atrás como si estuviera conectado por un resorte a otro átomo de la molécula (capítulo 43)

Ejemplo 15.1

Un sistema bloque-resorte

AM

Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura 15.6.

(A) Hallar el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 15.6 e imagine el bloque que se mueve hacia atrás y adelante en movimiento armónico simple una vez que se libera. Establezca un modelo experimental en la dirección vertical al colgar un objeto pesado, como una engrapadora, de una banda de hule resistente.

Categorizar El bloque se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

Analizar

Aplique la ecuación 15.9 para hallar la frecuencia angular del sistema bloque-resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

Use la ecuación 15.13 para encontrar el periodo del sistema:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00 \text{ rad/s}} = 1.26 \text{ s}$$

(B) Determine la rapidez máxima del bloque.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.17 para hallar $v_{\text{máx}}$:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.250 \text{ m/s}$$

(C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

► 15.1 continuación

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.18 para hallar $a_{\text{máx}}$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

(D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo en unidades del SI.

SOLUCIÓN

Encuentre la constante de fase a partir de la condición inicial de que $x = A$ en $t = 0$:

$$x(0) = A \cos \phi = A \rightarrow \phi = 0$$

Aplique la ecuación 15.6 para escribir una expresión para $x(t)$:

$$x = A \cos (\omega t + \phi) = 0.050 \text{ m} \cos 5.00t$$

Use la ecuación 15.15 para escribir una expresión para $v(t)$:

$$v = -\omega A \sin (\omega t + \phi) = -0.250 \text{ m/s} \sin 5.00t$$

Aplique la ecuación 15.16 para escribir una expresión para $a(t)$:

$$a = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi) = -1.25 \text{ m/s}^2 \cos 5.00t$$

Finalizar Considere el inciso (a) de la figura 15.7, que muestra las representaciones gráficas del movimiento del bloque en este problema. Asegúrese de que las representaciones matemáticas encontradas anteriormente en el inciso (D) son consistentes con estas representaciones gráficas.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el bloque se libera desde la misma posición inicial, $x_i = 5.00 \text{ cm}$, pero con una velocidad inicial de $v_i = -0.100 \text{ m/s}$? ¿Qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas para éstas?

Respuestas El inciso (A) no cambia porque el periodo es independiente de cómo se pone en movimiento el oscilador. Los incisos (B), (C) y (D) cambiarán.

Escriba las expresiones de posición y velocidad para las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} (1) \quad x(0) &= A \cos \phi = x_i \\ (2) \quad v(0) &= -\omega A \sin \phi = v_i \end{aligned}$$

Divida la ecuación (2) entre la ecuación (1) para encontrar la constante de fase:

$$\begin{aligned} \frac{-\omega A \sin \phi}{A \cos \phi} &= \frac{v_i}{x_i} \\ \tan \phi &= -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{-0.100 \text{ m/s}}{(5.00 \text{ rad/s})(0.050 \text{ m})} = 0.400 \\ \phi &= \tan^{-1}(0.400) = 0.121\pi \end{aligned}$$

Use la ecuación (1) para hallar A :

$$A = \frac{x_i}{\cos \phi} = \frac{0.050 \text{ m}}{\cos (0.121\pi)} = 0.053 \text{ m}$$

Encuentre la nueva rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(0.053 \text{ m}) = 0.269 \text{ m/s}$$

Encuentre la nueva magnitud de la aceleración máxima:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (0.053 \text{ m}) = 1.35 \text{ m/s}^2$$

Encuentre nuevas expresiones para posición, velocidad y aceleración en unidades del SI:

$$\begin{aligned} x &= 0.053 \text{ m} \cos (5.00t + 0.121\pi) \\ v &= -0.269 \text{ m/s} \sin (5.00t + 0.121\pi) \\ a &= -1.35 \text{ m/s}^2 \cos (5.00t + 0.121\pi) \end{aligned}$$

Como aprendió en los capítulos 7 y 8, muchos problemas son más fáciles de resolver al aplicar una aproximación energética en lugar de usar una en función de variables de movimiento. La condicional ¿Qué pasaría si? es más fácil de resolver a partir de una aproximación energética. Por lo tanto, en la siguiente sección se investigará la energía del oscilador armónico simple.

Ejemplo 15.2**¡Cuidado con los baches!****AM**

Un automóvil con una masa de 1 300 kg se construye de modo que su chasis está sostenido mediante cuatro amortiguadores. Cada amortiguador tiene una constante de fuerza de 20 000 N/m. Dos personas que viajan en el automóvil tienen una masa combinada de 160 kg. Encuentre la frecuencia de vibración del automóvil después que pasa sobre un bache en el camino.

continúa

► 15.2 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en sus experiencias con los automóviles. Cuando se sienta en un automóvil, se mueve hacia abajo una distancia pequeña porque su peso comprime aún más los amortiguadores. Si usted presiona la defensa frontal y la libera, el frente del automóvil oscila algunas veces.

Categorizar Imagine que el automóvil está sostenido mediante un solo amortiguador y modele al automóvil como una *partícula en movimiento armónico simple*.

Analizar Primero determine la constante de resorte efectiva de los cuatro amortiguadores combinados. Para una cierta extensión x de los amortiguadores, la fuerza combinada sobre el automóvil es la suma de las fuerzas de los amortiguadores individuales.

Encuentre una expresión para la fuerza total sobre el automóvil:

$$F_{\text{total}} = \sum (-kx) = -\left(\sum k\right)x$$

En esta expresión, x se factorizó de la suma porque es la misma para los cuatro amortiguadores. La constante de resorte efectiva para los amortiguadores combinados es la suma de las constantes del amortiguador individual.

Evalúe la constante de resorte efectiva:

$$k_{\text{efec}} = \sum k = 4 \times 20\,000 \text{ N/m} = 80\,000 \text{ N/m}$$

Use la ecuación 15.14 para encontrar la frecuencia de vibración:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{efec}}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,460 \text{ kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

Finalizar La masa que se usa en este caso es la del automóvil más las personas, porque es la masa total que oscila. Note también que sólo se exploró el movimiento hacia arriba y hacia abajo del automóvil. Si se establece una oscilación en la que el automóvil se mece de atrás para adelante, tal que el extremo frontal sube cuando el extremo posterior baja, la frecuencia será diferente.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el automóvil se detiene al lado del camino y las dos personas salen del auto. Una de ellas presiona hacia abajo el automóvil y lo libera de modo que oscile en la vertical. ¿La frecuencia de la oscilación es la misma que el valor recién calculado?

Respuesta El sistema de suspensión del automóvil es el mismo, pero la masa que oscila es menor: ya no incluye la masa de las dos personas. Por lo tanto, la frecuencia debe ser mayor. Calcule la nueva frecuencia considerando la masa como 1 300 kg:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{efec}}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,300 \text{ kg}}} = 1.25 \text{ Hz}$$

Como se predijo, la nueva frecuencia es un poco mayor.

15.3 Energía del oscilador armónico simple

Como ya lo hemos hecho antes, después de estudiar el modelado del movimiento de un objeto como una partícula en una situación nueva e investigado las fuerzas implicadas que influyen en ese movimiento, trataremos a la *energía*. Examine la energía mecánica de un sistema en el cual una partícula experimenta movimiento armónico simple, tal como el sistema bloque-resorte que se ilustra en la figura 15.1. Ya que la superficie no tiene fricción, el sistema está aislado y es de esperar que la energía mecánica total del sistema sea constante. Ahora suponga un resorte sin masa, de modo que la energía cinética del sistema sólo corresponde a la del bloque; puede usar la ecuación 15.15 para expresar la energía cinética del bloque como

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (15.19)$$

La energía potencial elástica almacenada en el resorte para cualquier elongación x está dada por $\frac{1}{2}kx^2$ (vea la ecuación 7.22). Si usa la ecuación 15.6 produce

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (15.20)$$

Energía cinética de un
oscilador armónico simple ►

Energía potencial de un
oscilador armónico ►

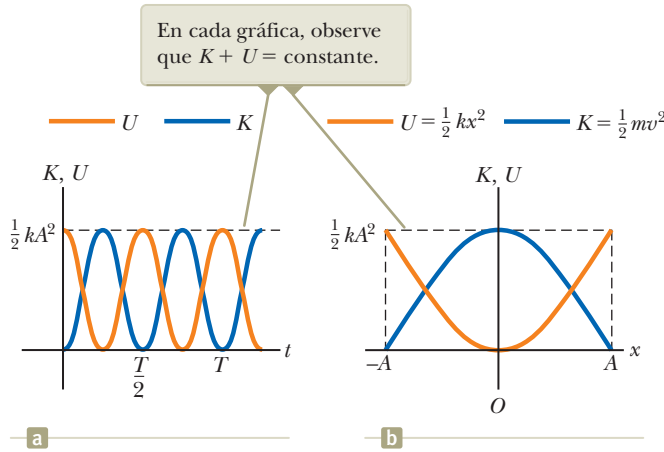


Figura 15.9 (a) Energía cinética y energía potencial contra tiempo de un oscilador armónico simple con $\phi = 0$. (b) La energía cinética y potencial de energía contra posición para un oscilador armónico simple.

Se ve que K y U *siempre* son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = k/m$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

A partir de la identidad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad. En consecuencia, esta ecuación se reduce a

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (15.21)$$

◀ **Energía total de un oscilador armónico**

Esto es: la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud. La energía mecánica total es igual a la energía potencial máxima almacenada en el resorte cuando $x = \pm A$, porque $v = 0$ en estos puntos y no hay energía cinética. En la posición de equilibrio, donde $U = 0$ porque $x = 0$, la energía total, toda en forma de energía cinética, de nuevo es $\frac{1}{2}kA^2$.

En la figura 15.9a aparecen gráficas de las energías cinética y potencial en función del tiempo, donde se consideró $\phi = 0$. En todo momento la suma de las energías cinética y potencial es una constante igual a $\frac{1}{2}kA^2$, la energía total del sistema.

Las variaciones de K y U con la posición x del bloque se grafican en la figura 15.9b. La energía se transforma continuamente entre energía potencial almacenada en el resorte y energía cinética del bloque.

La figura 15.10 de la página 460 ilustra la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial del sistema bloque-resorte para un periodo completo del movimiento. La mayoría de las ideas explicadas hasta el momento se incorpora en esta importante figura. Estúdiela cuidadosamente.

Por último, la velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene al expresar la energía total del sistema en alguna posición arbitraria x como

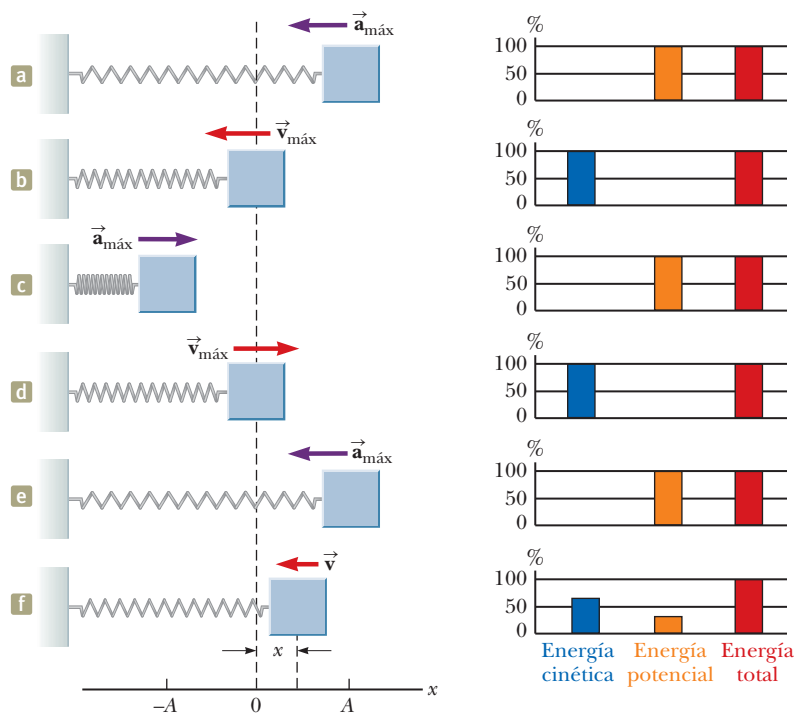
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (15.22)$$

◀ **La velocidad como una función de la posición para un oscilador armónico simple**

Al comprobar la ecuación 15.22 para ver si concuerda con casos conocidos, se encuentra que verifica que la rapidez es un máximo en $x = 0$ y es cero en los puntos de retorno $x = \pm A$.

Es posible que se pregunte por qué se pasa tanto tiempo en el estudio de los osciladores armónicos simples. La respuesta es porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, recuerde el potencial Lennard-Jones explicado en el ejemplo 7.9. Esta complicada función describe las fuerzas que mantienen unidos a los átomos. La figura 15.11a de la página 460 muestra que para pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, la curva de energía potencial para esta función se aproxima a una parábola, que representa la función



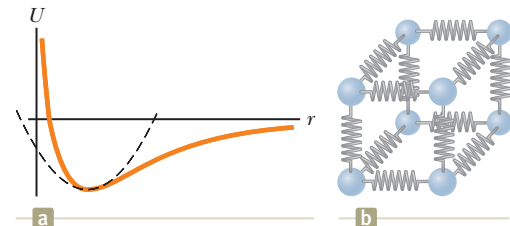
t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Figura 15.10 De la (a) a la (e): varios instantes en el movimiento armónico simple para un sistema bloque-resorte. Las gráficas de barras de energía muestran la distribución de la energía del sistema en cada instante. Los parámetros en la tabla de la derecha se refieren al sistema bloque-resorte, si supone que en $t = 0$, $x = A$; por eso, $x = A \cos \omega t$. Por estos cinco momentos especiales, uno de los tipos de energía es cero. (f) Un punto arbitrario en el movimiento del oscilador. El sistema tiene energía cinética y energía potencial en este instante, como se muestra en el gráfico de barras.

de energía potencial para un oscilador armónico simple. Por lo tanto, las fuerzas complejas en un enlace atómico se modelan como debidas a pequeños resortes, como se bosqueja en la figura 15.11b.

Las ideas presentadas en este capítulo no sólo se aplican a sistemas bloque-resorte y átomos, también funcionan con una amplia variedad de situaciones que incluyen el salto bungee, la sintonía en una estación de televisión y la vista de la luz emitida por un láser. Usted verá más ejemplos de osciladores armónicos simples mientras trabaja a lo largo de este libro.

Figura 15.11 (a) Si los átomos en una molécula no se mueven demasiado de sus posiciones de equilibrio, una gráfica de energía potencial con la distancia de separación entre átomos es similar a la gráfica de energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple (curva negra discontinua). (b) Las fuerzas entre los átomos en un sólido se pueden modelar al imaginar resortes entre átomos vecinos.



Ejemplo 15.3

Oscilaciones sobre una superficie horizontal

AM

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el que la constante de fuerza es 20.0 N/m oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción.

(A) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sistema oscila exactamente en la misma forma que el bloque de la figura 15.10, así utilice la figura en su imagen mental del movimiento.

► 15.3 continuación

Categorizar El carro se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

Analizar Use la ecuación 15.21 para encontrar la energía total del sistema oscilador e igualela con la energía cinética del carro en $x = 0$:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima y sustituya los valores numéricos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}}(0.0300 \text{ m}) = 0.190 \text{ m/s}$$

(B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.22 para evaluar la velocidad:

$$\begin{aligned} v &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}[(0.0300 \text{ m})^2 - (0.0200 \text{ m})^2]} \\ &= \pm 0.141 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Los signos positivo y negativo indican que el carro podría moverse hacia la derecha o a la izquierda en este instante.

(C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición es 2.00 cm.

SOLUCIÓN

Use el resultado del inciso (B) para evaluar la energía cinética en $x = 0.0200 \text{ m}$:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(0.141 \text{ m/s})^2 = 5.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Evalúe la energía potencial elástica en $x = 0.0200 \text{ m}$:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.0200 \text{ m})^2 = 4.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Finalizar La suma de las energías cinética y potencial en el inciso (C) es igual a la energía total que se encontró usando la ecuación 15.21. Esto debe ser cierto para *cualquier* posición del carro.

¿QUÉ PASARÍA SI? El carro en este ejemplo pudo haberse puesto en movimiento al liberarlo desde el reposo en $x = 3.00 \text{ cm}$. ¿Y si el carro se libera desde la misma posición, pero con una velocidad inicial de $v = -0.100 \text{ m/s}$, cuáles son las nuevas amplitud y rapidez máxima del carro?

Respuesta Esta pregunta es del mismo tipo que se planteó al final del ejemplo 15.1, pero en este caso se aplica a una aproximación energética.

Primero calcule la energía total del sistema en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(-0.100 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.0300 \text{ m})^2 \\ &= 1.15 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

Igualé esta energía total con la energía potencial cuando el carro está en el punto final del movimiento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Resuelva para la amplitud A :

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{20.0 \text{ N/m}}} = 0.0339 \text{ m}$$

Igualé la energía total con la energía cinética del sistema cuando el carro está en la posición de equilibrio:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{0.500 \text{ kg}}} = 0.214 \text{ m/s}$$

La amplitud y velocidad máximas son mayores que los valores previos porque al carro se le dio una velocidad inicial en $t = 0$.



Figura 15.12 La parte inferior de una máquina de coser de pedal de principios del siglo xx. El pedal es ancho y plano con rejas metálicas.

15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

Algunos dispositivos comunes en la vida cotidiana muestran una relación entre movimiento oscilatorio y movimiento circular. Por ejemplo, en el mecanismo de manejo de una máquina de coser no eléctrica en la figura 15.12, el operador pone su pie sobre el pedal y lo acciona de atrás hacia delante. Este movimiento oscilatorio hace que una gran rueda a la derecha experimente un movimiento circular. La banda roja que se ve en la fotografía transfiere este movimiento circular al mecanismo de la máquina de coser (fotografía anterior) y causa el movimiento oscilatorio de la aguja de coser. En esta sección se explora esta interesante relación entre estos dos tipos de movimiento.

La figura 15.13 muestra una vista de un arreglo experimental que muestra esta relación. Una bola se une al borde de una tornamesa de radio A , que está iluminada desde arriba por una lámpara. La bola proyecta una sombra sobre una pantalla. A medida que la tornamesa da vueltas con rapidez angular constante la sombra de la bola se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple.

Considere una partícula ubicada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A , como en la figura 15.14a, con la línea OP que forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. A este círculo se le llama *círculo de referencia*, para comparar el movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme, y se elige la posición de P en $t = 0$ como la posición de referencia. Si la partícula se mueve a lo largo del círculo con rapidez angular constante ω hasta que OP forma un ángulo θ con el eje x , como en la figura 15.14b, en algún tiempo $t > 0$ el ángulo entre OP y el eje x es $\theta = \omega t + \phi$. Conforme la partícula se mueve a lo largo del círculo, la proyección de P sobre el eje x , punto etiquetado Q , se mueve de atrás para adelante a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$.

Note que los puntos P y Q siempre tienen la misma coordenada x . A partir del triángulo rectángulo OPQ se ve que esta coordenada x es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.23)$$

Esta expresión es la misma que la ecuación 15.6 y muestra que el punto Q se mueve con movimiento de un objeto descrito por el análisis de modelo de una partícula en movimiento armónico simple a lo largo del eje x . Por lo tanto, el movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta se puede representar mediante la proyección de un objeto que se puede modelar como una partícula en movimiento circular uniforme a lo largo del diámetro de un círculo de referencia.

Esta interpretación geométrica muestra que el intervalo de tiempo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo de movimiento T para movimiento armónico simple entre $x = \pm A$. Es decir, la rapidez angular ω de P es la misma que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje x (que es por lo que se usa el mismo símbolo). La constante

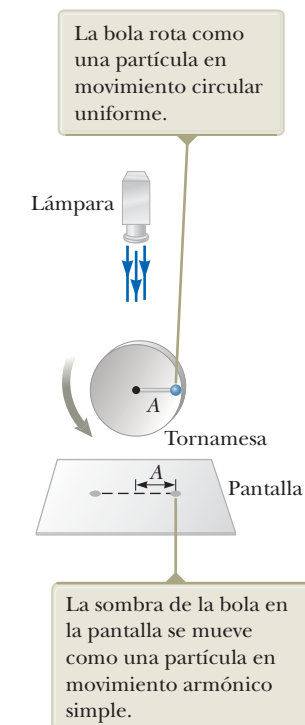


Figura 15.13 Un arreglo experimental para demostrar la conexión entre una partícula en movimiento armónico simple y una partícula correspondiente en movimiento circular uniforme.

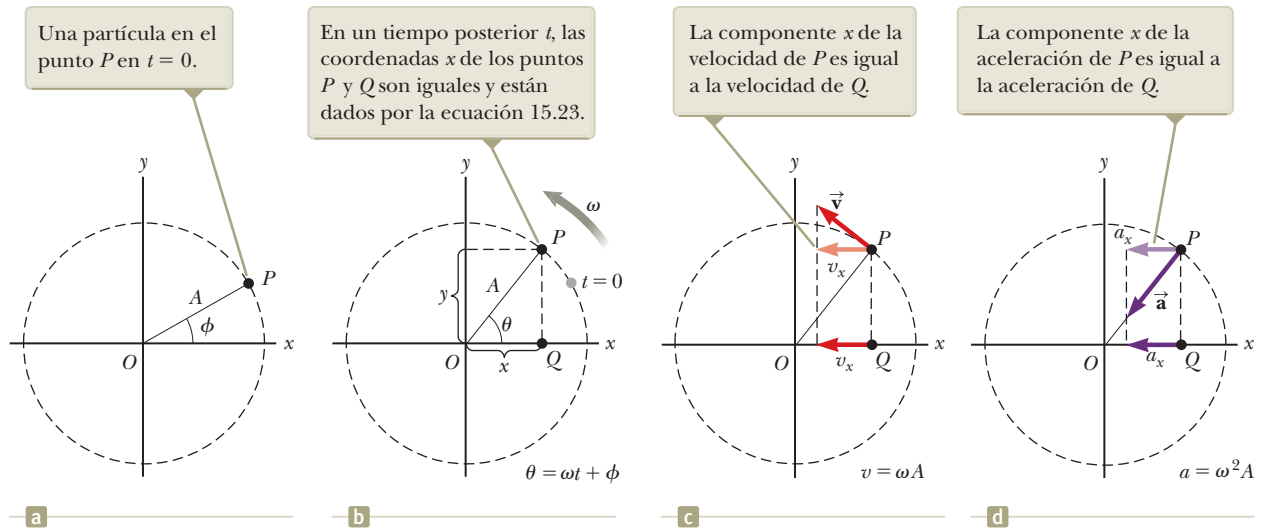


Figura 15.14 Relación entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q . Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω .

de fase ϕ para movimiento armónico simple corresponde al ángulo inicial OP que forma con el eje x . El radio A del círculo de referencia es igual a la amplitud del movimiento armónico simple.

Ya que la correspondencia entre rapidez lineal y angular para el movimiento circular es $v = r\omega$ (vea la ecuación 10.10), la partícula móvil en el círculo de referencia de radio A tiene una velocidad de magnitud ωA . A partir de la geometría en la figura 15.14c, se ve que la componente x de esta velocidad es $-\omega A \sin(\omega t + \phi)$. Por definición, el punto Q tiene una velocidad dada por dx/dt . Derivando la ecuación 15.23 respecto al tiempo, se encuentra que la velocidad de Q es la misma que la componente x de la velocidad de P .

La aceleración de P en el círculo de referencia se dirige radialmente hacia dentro, hacia O , y tiene magnitud $v^2/A = \omega^2 A$. A partir de la geometría de la figura 15.14d, se ve que la componente x de esta aceleración es $-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$. Este valor también es la aceleración del punto proyectado Q a lo largo del eje x , como se puede verificar al tomar la segunda derivada de la ecuación 15.23.

Ejercicio rápido 15.5 La figura 15.15 muestra la posición de un objeto en movimiento circular uniforme en $t = 0$. Una luz brilla desde arriba y proyecta una sombra del objeto sobre una pantalla abajo del movimiento circular. ¿Cuáles son los valores correctos para la *amplitud* y la *constante de fase* (en relación con un eje x a la derecha) del movimiento armónico simple de la sombra? (a) 0.50 m y 0, (b) 1.00 m y 0, (c) 0.50 m y π , (d) 1.00 m y π .

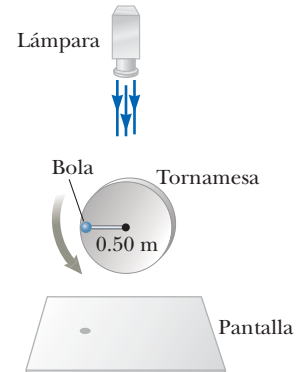


Figura 15.15 (Examen rápido 15.5) Un objeto se mueve en movimiento circular y proyecta una sombra sobre la pantalla abajo. Se muestra su posición en un instante de tiempo.

Ejemplo 15.4

Movimiento circular con rapidez angular constante

AM

La bola de la figura 15.13 gira en contra de las manecillas del reloj en un círculo de 3.00 m de radio, con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, su sombra tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve hacia la derecha.

(A) Determine la coordenada x de la sombra como función del tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Asegúrese de que comprende la relación entre el movimiento circular de la bola y el movimiento armónico simple de su sombra, como se describe en la figura 15.13. Advierta que la sombra *no* está en su posición máxima en $t = 0$.

Categorizar La bola sobre la tornamesa es una *partícula en movimiento circular uniforme*. La sombra se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

continúa

15.4 continuación

Analizar Use la ecuación 15.23 para escribir una expresión para la coordenada x de la partícula girando:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Se resuelve la constante de fase:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t$$

Sustituya valores numéricos para las condiciones iniciales:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00 \text{ m}}{3.00 \text{ m}}\right) - 0 = \pm 48.2^\circ = \pm 0.841 \text{ rad}$$

Si tuviéramos que tomar $\phi = +0.841 \text{ rad}$ como nuestra respuesta, la sombra que se mueve hacia la izquierda en $t = 0$. Ya que la sombra se mueve hacia la derecha en $t = 0$, debemos elegir $\phi = -0.841 \text{ rad}$.

Escriba la coordenada x como una función del tiempo:

$$x = 3.00 \cos(8.00t - 0.841)$$

(B) Encuentre las componentes x de velocidad y aceleración de la sombra en cualquier tiempo t .

SOLUCIÓN

Derivando la coordenada x respecto al tiempo para encontrar la velocidad en cualquier tiempo en m/s:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = (-3.00 \text{ m})(8.00 \text{ rad/s}) \sin(8.00t - 0.841) \\ &= -24.0 \sin(8.00t - 0.841) \end{aligned}$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo para encontrar la aceleración en cualquier tiempo en m/s^2 :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = (-24.0 \text{ m/s})(8.00 \text{ rad/s}) \cos(8.00t - 0.841) \\ &= -192 \cos(8.00t - 0.841) \end{aligned}$$

Finalizar Estos resultados son igualmente válidos para la bola en movimiento circular uniforme y la sombra en movimiento armónico simple. Observe que el valor de la constante de fase pone la bola en el cuarto cuadrante del sistema de coordenadas xy de la figura 15.14, que es consistente con la sombra con un valor positivo para x y se mueve hacia la derecha.

Cuando θ es pequeño, el movimiento de un péndulo simple se puede modelar como un movimiento armónico simple sobre la posición de equilibrio $\theta = 0$.

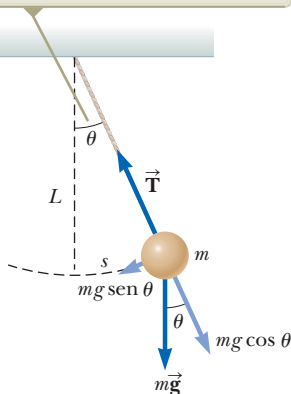


Figura 15.16 Un péndulo simple.

15.5 El péndulo

El **péndulo simple** es otro sistema mecánico que muestra movimiento periódico. Consiste de una plomada parecida a una partícula de masa m suspendida de una cuerda ligera de longitud L que está fija en el extremo superior, como se muestra en la figura 15.16. El movimiento se presenta en el plano vertical y es impulsado por la fuerza gravitacional. Se demostrará que siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor que aproximadamente 10°), el movimiento es muy cercano al de un oscilador armónico simple.

Las fuerzas que actúan en la plomada son la fuerza $\vec{T}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional $m\vec{g}$. La componente tangencial $mg \sin \theta$ de la fuerza gravitacional siempre actúa hacia $\theta = 0$, opuesta al desplazamiento de la plomada desde la posición más baja. Por lo tanto, la componente tangencial es una fuerza restauradora y se puede aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg \sin \theta = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza tangencial actúa hacia la posición de equilibrio (vertical) y s es la posición de la plomada medida a lo largo del arco. Hemos expresado la aceleración tangencial como la segunda derivada de la posición s . Ya que $s = L\theta$ (ecuación 10.1a con $r = L$) y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Al considerar θ como la posición, compare esta ecuación con la ecuación 15.3. ¿Tiene la misma forma matemática? El lado derecho es proporcional a $\sin \theta$ en vez de θ ; por eso, no se esperaría movimiento armónico simple porque esta expresión no tiene la forma de la ecuación 15.3. Sin embargo, si se supone que θ es pequeño (menor que aproximadamente 10° o 0.2 rad), se puede usar la **aproximación de ángulo pequeño**, en la que $\sin \theta \approx \theta$, donde θ se mide en radianes. La tabla 15.1 muestra ángulos en grados y radianes y los senos de estos ángulos. En tanto θ sea menor que aproximadamente 10° , el ángulo en radianes y su seno son los mismos hasta dentro de una precisión menor de 1.0 por ciento.

Por lo tanto, para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (\text{para valores pequeños de } \theta) \quad (15.24)$$

La ecuación 15.24 tiene la misma forma matemática que la ecuación 15.3, así se concluye que el movimiento para amplitudes de oscilación pequeñas se puede modelar como movimiento armónico simple. En consecuencia, la solución de la ecuación 15.24 es modelada después de la ecuación 15.6 y está dada por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la *posición angular máxima* y la frecuencia angular ω es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (15.25)$$

El periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (15.26)$$

En otras palabras, el periodo y la frecuencia de un péndulo simple sólo dependen de la longitud de la cuerda y de la aceleración debida a la gravedad. Ya que el periodo es independiente de la masa, se concluye que todos los péndulos simples que son de igual longitud y están en la misma ubicación (de modo que g es constante) oscilan con el mismo periodo.

El péndulo simple se puede usar como cronómetro porque su periodo sólo depende de su longitud y del valor local de g . También es un dispositivo conveniente para hacer mediciones precisas de la aceleración en caída libre. Tales mediciones son importantes porque las variaciones en los valores locales de g pueden proporcionar información acerca de la ubicación de petróleo y otros recursos subterráneos valiosos.

- Ejercicio rápido 15.6** Un reloj de péndulo depende del periodo de un péndulo para mantener el tiempo correcto. (i) Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente y luego un niño travieso desliza la plomada del péndulo hacia abajo sobre la barra oscilante. ¿El reloj se mueve (a) lento, (b) rápido o (c) correctamente? (ii) Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente a nivel del mar y luego se lleva a lo alto de una montaña muy alta. El reloj ahora se mueve, ¿(a) lento, (b) rápido o (c) correctamente?

Tabla 15.1 Ángulos y senos de ángulos

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno de ángulo	Porcentaje de diferencia
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%

Prevención de riesgos ocultos 15.5

Movimiento armónico simple no verdadero El péndulo *no* presenta cierto movimiento armónico simple para *cualquier* ángulo. Si el ángulo es menor de 10° , el movimiento está cerca y se puede *modelar* como armónico simple.

◀ Frecuencia angular para un péndulo simple

◀ Periodo de un péndulo simple

Ejemplo 15.5

Conexión entre longitud y tiempo

Christian Huygens (1629-1695), el mayor relojero de la historia, sugirió que se podía definir una unidad internacional de longitud como la longitud de un péndulo simple que tiene un periodo de exactamente 1 s. ¿Cuánta más corta sería la unidad de longitud actual si se hubiese seguido su sugerencia?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un péndulo que se balancee de atrás para adelante en exactamente 1 s. De acuerdo con su experiencia al observar objetos que se balancean, ¿puede hacer una estimación de la longitud requerida? Cuelgue un objeto pequeño de una cuerda y simule el péndulo de 1 s.

Categorizar Este ejemplo es sobre un péndulo simple, así que se clasifica como una aplicación de los conceptos introducidos en esta sección.

Resuelva la ecuación 15.26 para la longitud y sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00 \text{ s})^2 (9.80 \text{ m/s}^2)}{4\pi^2} = 0.248 \text{ m}$$

La longitud del metro sería ligeramente menor que un cuarto de su longitud actual. Además, el número de cifras significativas sólo depende de cómo se conoce exactamente g , porque el tiempo se definió exactamente como 1 s.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si Huygens hubiera nacido en otro planeta? ¿Cuál tendría que ser el valor de g en dicho planeta para que el metro en función del péndulo de Huygens tuviera el mismo valor que el metro actual?

Respuesta Resuelva la ecuación 15.26 para g :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 (1.00 \text{ m})}{(1.00 \text{ s})^2} = 4\pi^2 \text{ m/s}^2 = 39.5 \text{ m/s}^2$$

Ningún planeta en el Sistema Solar tiene una aceleración tan grande debida a la gravedad.

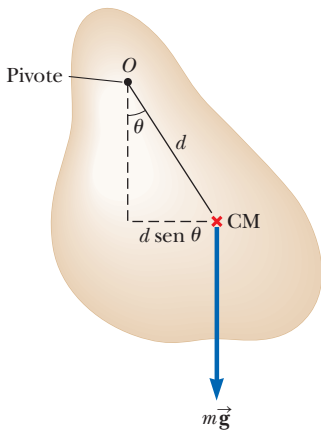


Figura 15.17 Un péndulo físico pivoteado en O .

Péndulo físico

Suponga que usted equilibra un gancho de alambre de modo que la punta esté sostenida por su dedo índice extendido. Cuando usted da al gancho un pequeño desplazamiento angular con su otra mano y luego lo libera, oscila. Si un objeto que cuelga oscila en torno a un eje fijo que no pasa a través de su centro de masa y el objeto no se puede aproximar como una masa puntual, no se puede tratar al sistema como un péndulo simple. En este caso el sistema se llama *péndulo físico*.

Considere un objeto rígido con centro de eje en un punto O que está a una distancia d del centro de masa (figura 15.17). La fuerza gravitacional proporciona un momento de torsión en torno a un eje a través de O , y la magnitud de dicho momento de torsión es $mgd \sin \theta$, donde θ es como se muestra en la figura 15.17. El objeto se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto y usa la forma rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$, donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje a través de O . El resultado es

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

El signo negativo indica que el momento de torsión en torno a O tiende a disminuir θ . Es decir, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión restaurador. Si de nuevo se supone que θ es pequeño, la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ es válida y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2 \theta \quad (15.27)$$

Ya que esta ecuación es de la misma forma que la ecuación 15.3, su solución es la del oscilador armónico simple. Es decir: la solución de la ecuación 15.27 está dada por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la máxima posición angular y

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (15.28)$$

Este resultado se puede usar para medir el momento de inercia de un objeto rígido plano. Si se conoce la posición del centro de masa y, por lo tanto, el valor de d , se obtiene el momento de inercia al medir el periodo. Por último, advierta que la ecuación 15.28 se reduce al periodo de un péndulo simple (ecuación 15.26) cuando $I = md^2$, es decir, cuando toda la masa se concentra en el centro de masa.

Ejemplo 15.6 Una barra que se balancea

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.18). Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una barra que se balancea de atrás para adelante cuando se articula en un extremo. Inténtelo con una regleta o una pieza de madera.

Categorizar Ya que la barra no es una partícula puntual, se le clasifica como un péndulo físico.

Analizar En el capítulo 10 se encontró que el momento de inercia de una barra uniforme en torno a un eje a través de un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d desde el eje al centro de masa de la barra es $L/2$.

Sustituya estas cantidades en la ecuación 15.28:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Finalizar En uno de los alunizajes, un astronauta que caminaba sobre la superficie de la Luna tenía un cinturón que colgaba de su traje espacial y el cinturón osciló como un péndulo físico. Un científico en la Tierra observó este movimiento en televisión y lo usó para estimar la aceleración de caída libre en la Luna. ¿Cómo hizo este cálculo el científico?

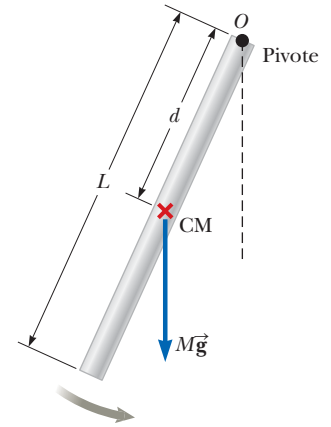


Figura 15.18 (Ejemplo 15.6) Una barra rígida que oscila en torno a un eje a través de un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$.

Péndulo de torsión

La figura 15.19 de la página 468 muestra un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a lo alto de un soporte fijo. Cuando el objeto gira a través de cierto ángulo θ , el alambre que gira ejerce sobre el objeto un momento de torsión restaurador que es proporcional a la posición angular. Es decir,

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ (letra griega kappa) se llama *constante de torsión* del alambre de soporte y es una rotación análoga a la fuerza constante κ para un resorte. El valor de κ se puede obtener al aplicar un momento de torsión conocido para girar el alambre a través de un ángulo mensurable θ . Al aplicar la segunda ley de Newton para movimiento rotacional se encuentra que

$$\begin{aligned} \sum \tau = I\alpha &\rightarrow -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{\kappa}{I}\theta \end{aligned} \quad (15.29)$$

De nuevo este resultado es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple, con $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (15.30)$$

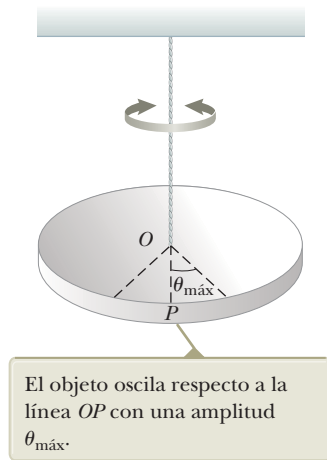


Figura 15.19 Un péndulo de torsión.

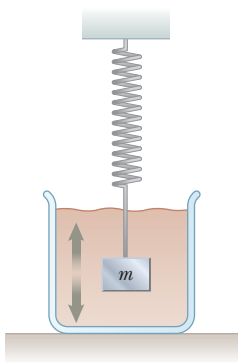


Figura 15.20 Un ejemplo de un oscilador amortiguado es un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Este sistema se llama *péndulo de torsión*. En esta situación no hay restricción de ángulo pequeño en tanto no se supere el límite elástico del alambre.

15.6 Oscilaciones amortiguadas

Los movimientos oscilatorios considerados hasta el momento han sido para sistemas ideales: sistemas que oscilan indefinidamente sólo bajo la acción de una fuerza, una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción o la resistencia del aire retardan el movimiento del sistema. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está *amortiguado*. La energía mecánica perdida se transforma en energía interna en el objeto y el medio retardador. La figura 15.20 bosqueja uno de tales sistemas: un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso. Otro ejemplo es un péndulo simple oscilando en el aire. Después de ponerse en movimiento, el péndulo va deteniendo su oscilación debido a la resistencia del aire. Los dispositivos basados en resortes de carga bajo el puente son amortiguadores que transforman la energía mecánica del puente oscilante en energía interna.

Un tipo común de fuerza retardadora es la que se explicó en la sección 6.4, donde la fuerza es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento y actúa en la dirección opuesta a la velocidad del objeto respecto al medio. Con frecuencia esta fuerza retardadora se observa cuando un objeto se mueve a través de aire, por ejemplo. Ya que la fuerza retardadora se puede expresar como $\vec{R} = -b\vec{v}$ (donde b es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*) y la fuerza restauradora del sistema es $-kx$, se puede escribir la segunda ley de Newton como

$$\begin{aligned}\sum F_x &= -kx - bv_x = ma_x \\ -kx - b \frac{dx}{dt} &= m \frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}\quad (15.31)$$

La solución a esta ecuación requiere matemática que tal vez no le sea familiar; en este caso simplemente se establece sin demostración. Cuando la fuerza retardadora es pequeña en comparación con la fuerza restauradora máxima (es decir, cuando b es pequeño), la solución a la ecuación 15.31 es

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi) \quad (15.32)$$

donde la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (15.33)$$

Este resultado se puede verificar al sustituir la ecuación 15.32 en la ecuación 15.31. Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama **frecuencia natural** del sistema.

La figura 15.21 muestra la posición como función del tiempo para un objeto que oscila en presencia de una fuerza retardadora. Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye exponencialmente en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa. Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**. Las líneas negras discontinuas en la figura 15.21, que definen la *envoltura* de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación 15.32. Esta envoltura muestra que la amplitud decae exponencialmente con el tiempo. Para movimiento con una constante de resorte y masa de cierto objeto dados, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente para valores más grandes de la fuerza retardadora.

Cuando la magnitud de la fuerza retardadora es pequeña, tal que $b/2m < \omega_0$, se dice que el sistema está **subamortiguado**. El movimiento resultante se representa mediante la curva azul de la figura 15.22. Conforme el valor de b aumenta, la amplitud de las oscilaciones disminuye más y más rápidamente. Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está **críticamente amortiguado**. En este caso el sistema, una vez liberado del reposo en alguna posición de no equilibrio, se aproxima pero no pasa a través de la posición de equilibrio. La gráfica de posición frente a tiempo para este caso es la curva roja en la figura 15.22.

Si el medio es tan viscoso que la fuerza retardadora es grande en comparación con la fuerza restauradora (es decir, si $b/2m > \omega_0$), el sistema está **sobreamortiguado**. De nuevo el sistema desplazado, cuando tiene libertad para moverse, no oscila, sino simplemente regresa a la posición de equilibrio. Conforme el amortiguamiento aumenta, el intervalo de tiempo requerido para que el sistema se aproxime al equilibrio también aumenta, como indica la curva negra en la figura 15.22. Para sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no hay frecuencia angular ω y la solución en la ecuación 15.32 no es válida.

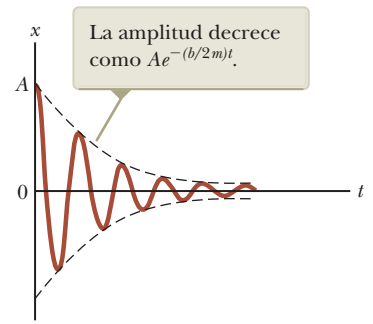


Figura 15.21 Gráfica de posición en función del tiempo para un oscilador amortiguado.

15.7 Oscilaciones forzadas

Se ha visto que la energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza retardadora. Es posible compensar esta disminución de energía al aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo sobre el sistema. En cualquier instante se puede transferir energía al sistema mediante una fuerza aplicada que actúe en la dirección de movimiento del oscilador. Por ejemplo, un niño en un columpio se puede mantener en movimiento mediante “empujones” adecuadamente cronometrados. La amplitud del movimiento permanece constante si la entrada de energía por cada ciclo de movimiento iguala exactamente la disminución en energía mecánica en cada ciclo que resulta de las fuerzas retardadoras.

Un ejemplo común de oscilador forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía periódicamente, tal como $F(t) = F_0 \sin \omega t$, donde F_0 es una constante y ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. En general, la frecuencia ω de la fuerza impulsora es variable, mientras que la frecuencia natural ω_0 del oscilador es fija por los valores de k y m . Al modelar un oscilador con fuerzas retardadoras e impulsoras como una partícula bajo una fuerza neta, la segunda ley de Newton en esta situación produce

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \sin \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (15.34)$$

De nuevo la solución de esta ecuación es más bien larga y no se presentará. Después que comienza a actuar la fuerza impulsora en un objeto inicialmente estable, la amplitud de la oscilación aumentará. El sistema del oscilador y el medio circundante es un sistema no aislado: el trabajo es realizado por la fuerza impulsora, de manera que la energía vibracional del sistema (energía cinética del objeto, la energía potencial elástica en el resorte) y la energía interna del objeto y el medio crecen. Después de un periodo suficientemente largo, cuando la entrada de energía por cada ciclo de la fuerza impulsora sea igual a la cantidad de energía mecánica transformada en energía interna por cada ciclo, se alcanza una condición de estado estacionario en que las oscilaciones proceden con amplitud constante. En esta situación, la solución de la ecuación 15.34 es

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.35)$$

donde

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (15.36)$$

y donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador subamortiguado ($b = 0$).

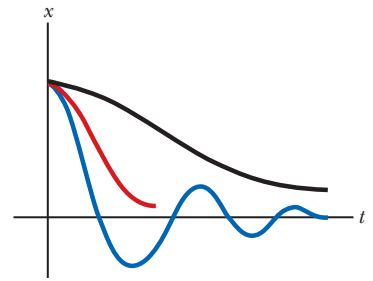


Figura 15.22 Gráficas de posición en función del tiempo para un oscilador subamortiguado (curva azul), un oscilador críticamente amortiguado (curva roja) y un oscilador sobreamortiguado (curva negra).

Amplitud de un ►
oscilador impulsado

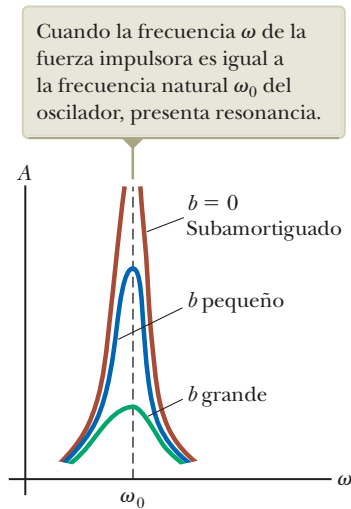


Figura 15.23 Gráfica de amplitud en función de la frecuencia para un oscilador amortiguado cuando está presente una fuerza impulsora periódica. Note que la forma de la curva de resonancia depende del tamaño del coeficiente de amortiguamiento b .

Las ecuaciones 15.35 y 15.36 muestran que el oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora y que la amplitud del oscilador es constante para una fuerza impulsora determinada porque se impulsa en estado estacionario mediante una fuerza externa. Para amortiguamiento pequeño, la amplitud es grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está cerca de la frecuencia natural de oscilación, o cuando $\omega \approx \omega_0$. El dramático aumento en amplitud cerca de la frecuencia natural se llama **resonancia**, y la frecuencia natural ω_0 también se llama la **frecuencia de resonancia** del sistema.

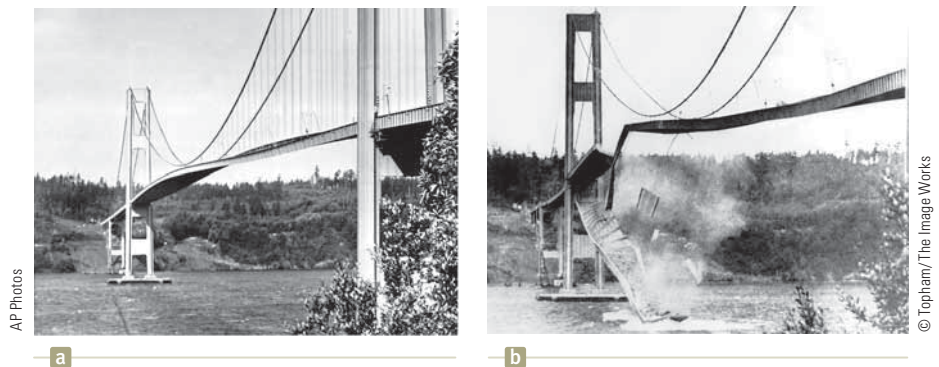
La explicación para oscilaciones de gran amplitud en la frecuencia de resonancia es que la energía se transfiere al sistema bajo las condiciones más favorables. Este concepto se comprende mejor si se considera la primera derivada de x en el tiempo en la ecuación 15.35, que produce una expresión para la velocidad del oscilador. Se encuentra que v es proporcional a $\sin(\omega t + \phi)$, que es la misma función trigonométrica que la descrita por la fuerza impulsora. Por lo tanto, la fuerza aplicada $\vec{F}$ está en fase con la velocidad. La rapidez a la que $\vec{F}$ realiza trabajo sobre el oscilador es igual al producto punto $\vec{F} \cdot \vec{v}$; esta rapidez es la potencia entregada al oscilador. Ya que el producto $\vec{F} \cdot \vec{v}$ es un máximo cuando $\vec{F}$ y $\vec{v}$ están en fase, se concluye que, en resonancia, la fuerza aplicada está en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es un máximo.

La figura 15.23 es una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin amortiguamiento. Advierta que la amplitud aumenta con amortiguamiento decreciente ($b \rightarrow 0$) y que la curva de resonancia se ensancha a medida que aumenta el amortiguamiento. En ausencia de una fuerza de amortiguamiento ($b = 0$), por la ecuación 15.36 se observa que la amplitud en estado estacionario tiende a infinito conforme ω tiende a ω_0 . En otras palabras, si no hay pérdidas en el sistema y se continúa impulsando un oscilador inicialmente sin movimiento con una fuerza periódica que está en fase con la velocidad, la amplitud del movimiento se acumula sin límite (vea la curva café de la figura 15.23). Esta acumulación sin límite no se presenta en la práctica porque en realidad siempre hay presente algún amortiguamiento.

Más adelante en este libro se verá que la resonancia aparece en otras áreas de la física. Por ejemplo, ciertos circuitos eléctricos tienen frecuencias naturales y pueden entrar en fuerte resonancia al variar el voltaje aplicado a una frecuencia dada. Un puente tiene frecuencias naturales que se pueden poner en resonancia mediante una fuerza impulsora adecuada. Un dramático ejemplo de tal resonancia se presentó en 1940, cuando el puente Tacoma Narrows, en el estado de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el “aleteo” del viento a través del camino (piense en el “aleteo” de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia se emparejó con la del puente. Las oscilaciones resultantes del puente hicieron que a final de cuentas colapsara (figura 15.24) porque el diseño del puente tenía características inadecuadas de seguridad interna.

Se pueden citar muchos otros ejemplos de vibraciones resonantes. Una vibración resonante que puede haber experimentado el lector es el “canturreo” de los cables de

Figura 15.24 (a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. (b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (Son un desafío para matemáticos y físicos algunos aspectos de esta interpretación).



teléfono en el viento. Las máquinas fallan con frecuencia si una parte en vibración está en resonancia con alguna otra parte móvil. Se ha sabido de soldados que, al marchar en cadencia por un puente, establecieron vibraciones resonantes en la estructura y por ello causaron su colapso. Siempre que cualquier sistema físico real sea impulsado cerca de su frecuencia de resonancia se pueden producir oscilaciones de amplitudes muy grandes.

Resumen

Conceptos y principios

Las energías cinética y potencial para un objeto de masa m que oscila en el extremo de un resorte con constante de fuerza k varían con el tiempo y están dadas por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (15.19)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (15.20)$$

La energía total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y está dada por

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (15.21)$$

Un **péndulo simple** de longitud L puede modelarse si se mueve en movimiento armónico simple para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical. Su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (15.26)$$

Para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical, un **péndulo físico** puede modelarse si se mueve en movimiento armónico simple en torno a un perno que no pasa a través del centro de masa. El periodo de este movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (15.28)$$

donde I es el momento de inercia en torno a un eje a través del eje y d es la distancia desde el eje al centro de masa.

Si un oscilador experimenta una fuerza amortiguadora $\vec{R} = -b\vec{v}$, su posición para amortiguamiento pequeño está descrita por

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi) \quad (15.32)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (15.33)$$

Si un oscilador está sujeto a una fuerza impulsora sinusoidal $F(t) = F_0 \sin \omega t$, muestra *resonancia*, en la cual la amplitud es mayor cuando la frecuencia impulsora ω coincide con la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ del oscilador.

Análisis de modelos para resolver problemas

Partícula en movimiento armónico simple Si una partícula se somete a una fuerza de la forma de la ley de Hooke, $F = -kx$, la partícula muestra **movimiento armónico simple**. Su posición se describe mediante

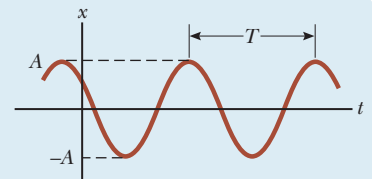
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.6)$$

donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. El valor de ϕ depende de la posición y velocidad iniciales de la partícula.

El **periodo** de la oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (15.13)$$

y el inverso del periodo es la *frecuencia*.



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

- Si se duplica la longitud de un péndulo simple que oscila con una amplitud pequeña, ¿qué pasa con la frecuencia de su movimiento? (a) Se duplica. (b) Resulta $\sqrt{2}$ veces más grande. (c) Resulta la mitad de grande. (d) Resulta $1/\sqrt{2}$ veces más grande. (e) Sigue siendo la misma.
- Usted une un bloque al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente. Deja que el bloque se mueva despacio hacia abajo y encuentra que cuelga en reposo con el resorte estirado 15.0 cm. A continuación, levanta el bloque de nuevo y lo libera desde el reposo con el resorte no estirado. ¿Qué distancia máxima se mueve hacia abajo? (a) 7.5 cm, (b) 15.0 cm, (c) 30.0 cm, (d) 60.0 cm, (e) no se puede determinar la distancia sin conocer la masa y la constante del resorte.
- Un sistema de bloque-resorte que vibra sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 6.0 cm tiene una energía de 12 J. Si el bloque es reemplazado por uno cuya masa es dos veces la masa del bloque original y la amplitud del movimiento es otra vez 6.0 cm, ¿cuál es la energía del sistema? (a) 12 J, (b) 24 J, (c) 6 J, (d) 48 J, (e) ninguna de esas respuestas.
- Un sistema de objeto-resorte con movimiento armónico simple tiene una amplitud A . Cuando la energía cinética del objeto es igual a dos veces la energía potencial almacenada en el resorte, ¿cuál es la posición x del objeto? (a) A , (b) $\frac{1}{3}A$, (c) $A/\sqrt{3}$, (d) 0, (e) ninguna de esas respuestas.
- Un objeto de masa 0.40 kg cuelga de un resorte con una constante de resorte de 8.0 N/m, se encuentra en un movimiento armónico simple de arriba-abajo. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración del objeto cuando está en su desplazamiento máximo de 0.10 m? (a) cero, (b) 0.45 m/s^2 , (c) 1.0 m/s^2 , (d) 2.0 m/s^2 , (e) 2.4 m/s^2 .
- Un vagón desbocado, con masa $3.0 \times 10^5 \text{ kg}$, corre a través de un nivel de la vía a 2.0 m/s cuando choca elásticamente con un parachoques con resorte en el extremo de la vía. Si la constante elástica del parachoques es $2.0 \times 10^6 \text{ N/m}$, ¿cuál es la máxima compresión del resorte durante la colisión. (a) 0.77 m (b) 0.58 m (c) 0.34 m (d) 1.07 m (e) 1.24 m
- La posición de un objeto que se mueve con movimiento armónico simple está dada por $x = 4 \cos(6\pi t)$, donde x está en metros y t está en segundos. ¿Cuál es el periodo del sistema oscilante? (a) 4 s, (b) $\frac{1}{6} \text{ s}$, (c) $\frac{1}{3} \text{ s}$, (d) $6\pi \text{ s}$, (e) es imposible determinar a partir de la información dada.
- Si un objeto de masa m unido a un resorte ligero es reemplazado por uno de masa $9m$ cambia la frecuencia del sistema vibratorio, ¿en qué factor? (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3.0 (d) 9.0 (e) 6.0
- Usted está de pie en el borde de un trampolín y rebota para ponerlo en oscilación. Encuentre una respuesta máxima en términos de la amplitud de oscilación del borde del trampolín, cuando rebote a la frecuencia f . Ahora se mueve a la mitad del trampolín y repite el experimento. ¿La frecuencia de resonancia para oscilaciones forzadas en este punto es (a) mayor, (b) menor o (c) la misma que f ?
- Un sistema de masa-resorte se mueve con movimiento armónico simple en el eje x entre los puntos de inflexión en $x_1 = 20 \text{ cm}$ y $x_2 = 60 \text{ cm}$. Para los incisos del (i) al (iii), elija las mismas cinco posibilidades. (i) ¿En qué posición tiene la mayor magnitud la cantidad de movimiento de la partícula? (a) 20 cm, (b) 30 cm, (c) 40 cm (d) alguna otra posición (e) el mayor valor se produce en varios puntos. (ii) ¿En qué posición tiene mayor energía cinética la partícula? (iii) ¿En qué posición tiene mayor energía total del sistema de partícula-resorte?
- Un bloque con masa $m = 0.1 \text{ kg}$ oscila con amplitud $A = 0.1 \text{ m}$ en el extremo de un resorte con fuerza constante $k = 10 \text{ N/m}$ sobre una superficie horizontal sin fricción. Ordene los periodos de las siguientes situaciones de mayor a menor. Si algunos periodos son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. (a) El sistema es como se describió anteriormente. (b) El sistema es como se describe en la situación (a), excepto que la amplitud es 0.2 m. (c) La situación es como se describe en la situación (a), excepto que la masa es de 0.2 kg. (d) La situación es como se describe en la situación (a), excepto que el resorte tiene una constante de fuerza de 20 N/m. (e) Una pequeña fuerza resistiva hace que el movimiento sea subamortiguado.
- Para un oscilador armónico simple, responda sí o no a las siguientes preguntas. (a) ¿Pueden las cantidades de la posición y velocidad tener el mismo signo? (b) ¿Pueden la velocidad y la aceleración tener el mismo signo? (c) ¿Pueden la posición y la aceleración tener el mismo signo?
- El extremo superior de un resorte se mantiene fijo. Un bloque se cuelga en el extremo inferior como en la figura PO15.13a y se mide la frecuencia f de la oscilación del sistema. El bloque, un bloque segundo idéntico y el resorte se llevan en un transbordador espacial en órbita de la Tierra. Los dos bloques se unen a los extremos del resorte. El resorte está comprimido sin tener espirales adyacentes que se toquen (figura PO15.13b), y el sistema se libera para oscilar mientras flota dentro de la cabina del transbordador (figura PO15.13c). ¿Cuál es la frecuencia de oscilación para este sistema en términos de f ? (a) $f/2$, (b) $f/\sqrt{2}$, (c) f , (d) $\sqrt{2}f$, (e) $2f$.
- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones *no* es verdadera con respecto a un sistema masa-resorte que se mueve con movimiento armónico simple en ausencia de fricción? (a) La energía total del sistema permanece constante. (b) La energía del sistema se transforma continuamente entre la energía cinética y potencial. (c) La energía total del sistema es proporcional al cuadrado de la amplitud. (d) La energía potencial almacenada en el sistema es mayor cuando la masa pasa a través de la posición de equilibrio. (e) La velocidad de la masa oscilante tiene su valor máximo cuando la masa pasa a través de la posición de equilibrio.

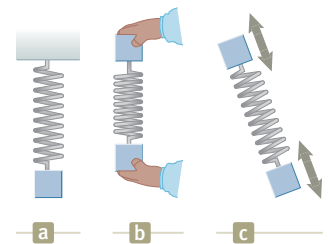


Figura PO15.13

15. Un péndulo simple tiene un periodo de 2.5 s. (i) ¿Cuál es su periodo, si su longitud se hace cuatro veces más grande? (a) 1.25 s, (b) 1.77 s, (c) 2.5 s, (d) 3.54 s, (e) 5 s. (ii) ¿Cuál es su periodo si, en lugar de cambiar su longitud, la masa de la plomada suspendida se hace cuatro veces más grande? Elija entre las mismas posibilidades.
16. Un péndulo simple está suspendido del techo de un elevador estable y se determina el periodo. (i) Cuando el elevador acelera hacia arriba, ¿el periodo es (a) mayor, (b) menor o (c) no cambia? (ii) Cuando el elevador tiene aceleración hacia abajo, ¿el periodo es (a) mayor, (b) menor o (c) no cambia? (iii) Cuando el elevador se

mueve con velocidad constante hacia arriba, ¿el periodo del péndulo es (a) mayor, (b) menor o (c) no cambia?

17. Una partícula en un resorte se mueve en movimiento armónico simple a lo largo del eje x entre los puntos de retorno en $x_1 = 100$ cm y $x_2 = 140$ cm. (i) ¿En cuál de las siguientes posiciones la partícula tiene rapidez máxima? (a) 100 cm, (b) 110 cm, (c) 120 cm, (d) alguna otra posición. (ii) ¿En cuál posición tiene aceleración máxima? Escoja de las mismas posibilidades que en el inciso (i). (iii) ¿En cuál posición se ejerce la mayor fuerza neta sobre la partícula? Escoja de las mismas posibilidades que en el inciso (i).

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

- Usted observa un pequeño árbol frondoso. No nota brisa y la mayoría de las hojas en el árbol están sin movimiento. Sin embargo, una hoja se agita salvajemente de atrás para adelante. Después de un rato la hoja deja de moverse y usted nota que una hoja diferente se mueve mucho más que todas las demás. Explique qué podría causar el gran movimiento de una hoja particular.
- Las ecuaciones que se mencionan en la página 38 dan la posición como una función del tiempo, la velocidad como una función del tiempo y la aceleración como función de la posición para un objeto que se mueve en línea recta con aceleración constante. La cantidad v_{xi} aparece en cada ecuación. (a) ¿Alguna de estas ecuaciones se aplica a un objeto que se mueve en línea recta con movimiento armónico simple? (b) Con un formato similar, haga una tabla de ecuaciones que describan el movimiento armónico simple. Incluya ecuaciones que den la aceleración como una función del tiempo y la aceleración como una función de la posición. Establezca las ecuaciones en tal forma que se apliquen igualmente a un sistema bloque-resorte, a un péndulo y a otros sistemas en vibración. ¿Qué cantidad aparece en cada ecuación?
- (a) Si la coordenada de una partícula varía como $x = -A \cos \omega t$, ¿cuál es la constante de fase en la ecuación 15.6? (b) ¿En qué posición la partícula está en $t = 0$?
- La plomada de cierto péndulo es una esfera llena con agua. ¿Qué ocurriría a la frecuencia de vibración de este péndulo si hubiera un orificio en la esfera que permitiera al agua salir lentamente?
- La figura PC15.5 muestra gráficas de la energía potencial de cuatro sistemas diferentes en función de la posición de

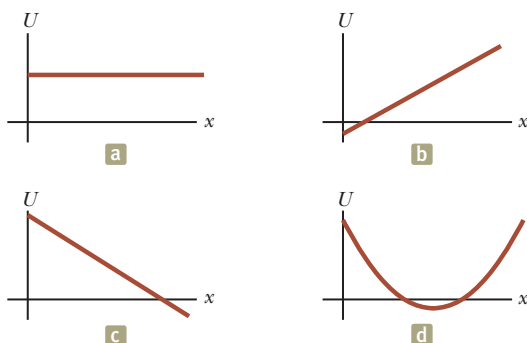


Figura PC15.5

una partícula en cada sistema. Cada partícula se pone en movimiento con un empujón en una ubicación elegida arbitrariamente. Describa su movimiento posterior en cada caso (a), (b), (c) y (d).

- Un estudiante cree que cualquier vibración real debe ser amortiguada. ¿El estudiante tiene razón? Si es así, proporcione un razonamiento convincente. Si no, dé un ejemplo de una vibración real que mantenga amplitud constante por siempre, si el sistema está aislado.
- La energía mecánica de un sistema bloque-resorte no amortiguado es constante a medida que la energía cinética se transforma en energía potencial elástica y viceversa. Para comparar, explique en los mismos términos qué le sucede a la energía de un oscilador amortiguado.
- ¿Es posible tener oscilaciones amortiguadas cuando un sistema está en resonancia? Explique.
- ¿Se presentarían oscilaciones amortiguadas para cualquier valor de b y k ? Explique.
- Si un reloj de péndulo da el tiempo perfecto en la base de una montaña, ¿también dará el tiempo perfecto cuando se mueve a la cima de una montaña? Explique.
- ¿Una pelota que rebota es un ejemplo de movimiento armónico simple? ¿El movimiento diario de un estudiante desde su casa a la escuela y de regreso es un movimiento armónico simple? ¿Por qué sí o por qué no?
- Un péndulo simple se puede modelar como uno de movimiento armónico simple cuando θ es pequeño. ¿El movimiento es periódico cuando θ es grande?
- Considere el motor de un solo pistón simplificado de la figura PC15.13. Suponiendo que la rueda gira con velocidad angular constante, explique por qué la varilla del pistón oscila con movimiento armónico simple.

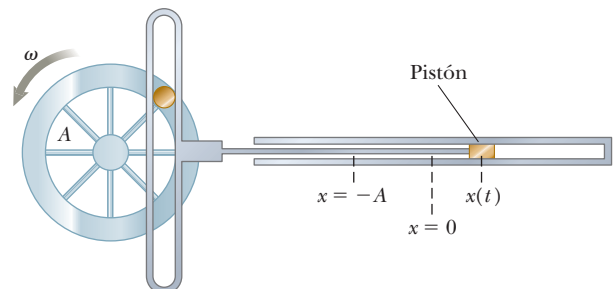


Figura PC15.13

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: Ignore la masa de cada resorte, excepto en los problemas 76 y 87.

Sección 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Los problemas 17, 18, 19, 22 y 59 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

- Un bloque de 0.60 kg unido a un resorte con fuerza constante de 130 N/m es libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 15.1. El bloque se suelta a partir del reposo cuando el resorte se extiende 0.13 m. En el instante en que se libera el bloque, (a) encuentre la fuerza en el bloque y (b) su aceleración.
- Cuando un objeto de 4.25 kg se coloca sobre un resorte vertical, el resorte se comprime una longitud de 2.62 cm. ¿Cuál es la fuerza constante del resorte?

Sección 15.2 Análisis de modelo: partícula en movimiento armónico simple

- Un resorte vertical se extiende 3.9 cm cuando se cuelga un objeto de 10 g. El objeto se reemplaza con un bloque de masa 25 g que oscila hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple. Calcule el periodo del movimiento.
- En un motor, un pistón oscila con movimiento armónico simple de modo que su posición varía de acuerdo con la expresión

$$x = 5.00 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

donde x está en centímetros y t en segundos. En $t = 0$, encuentre (a) la posición de la partícula, (b) su velocidad y (c) su aceleración. Encuentre (d) el periodo y (e) la amplitud del movimiento.

- La posición de una partícula está dada por la expresión $x = 4.00 \cos(3.00\omega t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine: (a) la frecuencia y (b) el periodo del movimiento, (c) la amplitud del movimiento, (d) la constante de fase y (e) la posición de la partícula en $t = 0.250$ s.
- Un pistón en un motor a gasolina está en movimiento armónico simple. El motor está corriendo a razón de 3 600 rev/min. Si considera los extremos de su posición relativa con su punto central como ± 5.00 cm, encuentre las magnitudes de (a) la velocidad máxima y (b) la aceleración máxima del pistón.
- Un objeto de 1.00 kg se une a un resorte horizontal. El resorte inicialmente se estira 0.100 m y ahí se libera el objeto desde el reposo. Éste comienza a moverse sin fricción. La siguiente vez que la rapidez del objeto es cero es 0.500 s después. ¿Cuál es la rapidez máxima del objeto?
- Un oscilador armónico simple toma 12.0 s experimentando cinco vibraciones completas. Encuentre (a) el periodo

de su movimiento, (b) la frecuencia en hertz y (c) la frecuencia angular en radianes por segundo.

- Un objeto de 7.00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical amarrado a una viga. El objeto se pone a oscilar verticalmente con un periodo de 2.60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.
- En un mercado al aire libre, una penca de plátanos está unida en la parte inferior de un resorte vertical de constante de fuerza de 16.0 N/m que se encuentra en movimiento oscilatorio con una amplitud de 20.0 cm. Se observa que la velocidad máxima de la penca de plátanos es 40.0 cm/s. ¿Cuál es el peso de los plátanos en newtons?
- Un sensor de vibración, utilizado en la prueba de una lavadora, consiste en un cubo de aluminio de 1.50 cm de arista montado en un extremo de una tira de acero del resorte (como una hoja de sierra) que se encuentra en un plano vertical. La masa de la tira es pequeña comparada con la del cubo, pero la longitud de la tira es grande en comparación con el tamaño del cubo. El otro extremo de la tira se sujeta al bastidor de la máquina que no está en funcionamiento. Se necesita aplicar una fuerza horizontal de 1.43 N en el cubo para sostenerlo a 2.75 cm de su posición de equilibrio. Si se libera, ¿cuál es su frecuencia de vibración?
- (a) Un resorte que cuelga se estira 35.0 cm cuando un objeto de 450 g de masa se cuelga de él en reposo. En esta situación se define su posición como $x = 0$. El objeto se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. ¿Cuál es su posición x en un momento 84.4 s más tarde? (b) Encuentre la distancia viajada por el objeto vibratorio en el inciso (a). (c) ¿Qué pasaría si? Otro resorte que cuelga se estira 35.5 cm cuando un objeto de 440 g de masa se cuelga de él en reposo. Esta nueva posición se define como $x = 0$. Dicho objeto también se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. Encuentre su posición 84.4 s más tarde. (d) Encuentre la distancia viajada por el objeto en el inciso (c). (e) ¿Por qué las respuestas a los incisos (a) y (c) son tan diferentes cuando los datos de los incisos (a) y (c) son tan similares y las respuestas de los incisos (b) y (d) son relativamente cercanas? ¿Esta circunstancia revela una dificultad fundamental para calcular en el futuro?

- Problema de repaso.** Una partícula se mueve a lo largo del eje x . Al inicio está en la posición 0.270 m y se mueve con velocidad de 0.140 m/s y aceleración de -0.320 m/s². Suponga que se mueve como una partícula con aceleración constante durante 4.50 s. Encuentre (a) su posición y (b) su velocidad al final de este intervalo de tiempo. A continuación, suponga que se mueve con movimiento armónico simple durante 4.50 s y $x = 0$ es su posición de equilibrio. Encuentre (c) su posición y (d) su velocidad al final de este intervalo de tiempo.

14. Se deja caer una bola desde una altura de 4.00 m que realiza una colisión elástica con el suelo. Si supone que no hay pérdida de energía mecánica debida a resistencia del aire, (a) demuestre que el movimiento resultante es periódico y (b) determine el periodo del movimiento. (c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.
15. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x en movimiento armónico simple parte de su posición de equilibrio, el origen, en $t = 0$ y se mueve a la derecha. La amplitud de su movimiento es de 2.00 cm y la frecuencia de 1.50 Hz. (a) Encuentre una expresión para la posición de la partícula como una función del tiempo. Determine (b) la rapidez máxima de la partícula y (c) el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta rapidez. Encuentre (d) la aceleración positiva máxima de la partícula y (e) el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta aceleración y (f) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.
16. La posición inicial, velocidad y aceleración de un objeto que se mueve en movimiento armónico simple son x_i , v_i y a_i ; la frecuencia angular de oscilación es ω . (a) Demuestre que la posición y velocidad del objeto para todos los tiempos se pueden escribir como

$$x(t) = x_i \cos \omega t + \left(\frac{v_i}{\omega} \right) \sin \omega t$$

$$v(t) = -x_i \omega \sin \omega t + v_i \cos \omega t$$

(b) Usando A para representar la amplitud del movimiento, demuestre que

$$v^2 - ax = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2$$

17. Una partícula se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 3.00 Hz y una amplitud de 5.00 cm. (a) ¿Qué distancia total se mueve la partícula durante un ciclo de su movimiento? (b) ¿Cuál es su rapidez máxima? ¿Dónde ocurre esta rapidez máxima? (c) Encuentre la aceleración máxima de la partícula. En el movimiento, ¿dónde ocurre la aceleración máxima?
18. Un deslizador de 1.00 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 25.0 N/m, oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. En $t = 0$, el deslizador se libera desde el reposo en $x = -3.00$ cm. (Es decir: el resorte se comprime 3.00 cm.) Encuentre (a) el periodo de su movimiento, (b) los valores máximos de su rapidez y aceleración, y (c) la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.
19. Un objeto de 0.500 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 8.0 N/m, vibra en movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Calcule el máximo valor (a) de su rapidez y (b) aceleración, (c) la rapidez y (d) aceleración cuando el objeto está a 6.00 cm de la posición de equilibrio, y (e) el intervalo de tiempo requerido para que el objeto se mueva de $x = 0$ a $x = 8.00$ cm.
20. Usted une un objeto al extremo inferior de un resorte vertical que cuelga en reposo después de extender el resorte 18.3 cm. Luego pone el objeto a vibrar. (a) ¿Tiene suficiente información para encontrar su periodo? (b) Explique su respuesta y establezca lo que pueda acerca de su periodo.

Sección 15.3 Energía del oscilador armónico simple

21. Para probar la resistencia de su tope con colisiones de baja velocidad, se conduce un automóvil de 1 000 kg hacia una pared de ladrillos. Los parachoques del automóvil se comportan como un resorte con una constante de fuerza 5.00×10^6 N/m y se comprime 3.16 cm cuando el automóvil alcanza el reposo. ¿Cuál era la rapidez del automóvil antes del impacto, suponiendo que no se transforma o transfiere energía mecánica durante el impacto con la pared?
22. Un bloque de 200 g se une a un resorte horizontal y ejecuta un movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. La energía total del sistema es de 2.00 J. Encuentre (a) la constante de fuerza del resorte y (b) la amplitud del movimiento.
23. Un bloque de masa desconocida se conecta a un resorte con una constante de resorte de 6.50 N/m y experimenta un movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Cuando el bloque está a la mitad entre su posición de equilibrio y el punto final, su rapidez que se mide es de 30.0 cm/s. Calcule (a) la masa del bloque, (b) el periodo del movimiento y (c) la aceleración máxima del bloque.
24. Un sistema bloque-resorte oscila con una amplitud de 3.50 cm. La constante de resorte es 250 N/m y la masa del bloque es 0.500 kg. Determine (a) la energía mecánica del sistema, (b) la rapidez máxima del bloque y (c) la aceleración máxima.
25. Una partícula ejecuta movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿En qué posición su rapidez es igual a la mitad de su rapidez máxima?
26. La amplitud de un sistema que se mueve con movimiento armónico simple se duplica. Determine el cambio en (a) la energía total, (b) la rapidez máxima, (c) la aceleración máxima y (d) el periodo.
27. Un objeto de 50.0 g, conectado a un resorte con una constante de fuerza de 35.0 N/m, oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 4.00 cm. Encuentre (a) la energía total del sistema y (b) la rapidez del objeto cuando la posición es de 1.00 cm. Encuentre (c) la energía cinética y (d) la energía potencial cuando la posición es de 3.00 cm.
28. Un objeto de 2.00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie horizontal uniforme. Se requiere una fuerza horizontal de 20.0 N para mantener al objeto en reposo cuando se jala 0.200 m desde su posición de equilibrio (el origen del eje x). Ahora el objeto se libera desde su posición estirada y se somete a sucesivas oscilaciones armónicas simples. Encuentre (a) la constante de fuerza del resorte, (b) la frecuencia de las oscilaciones y (c) la rapidez máxima del objeto. (d) ¿Dónde ocurre la rapidez máxima? (e) Encuentre la aceleración máxima del objeto. (f) ¿Dónde ocurre la aceleración máxima? (g) Encuentre la energía total del sistema oscilante. Encuentre (h) la rapidez e (i) la aceleración del objeto cuando su posición es igual a un tercio del valor máximo.
29. Un oscilador armónico simple de amplitud A tiene una energía total E . Determine (a) la energía cinética y (b) la energía potencial cuando la posición es un tercio de la amplitud. (c) ¿Para qué valores de la posición la ener-

gía cinética es igual a la mitad de la energía potencial? (d) ¿Hay algún valor de la posición donde la energía cinética es mayor que la máxima energía potencial? Explique.

30. **Problema de repaso.** Una saltadora de bungee de 65.00 kg salta de un puente con una cuerda ligera amarrada a ella y al puente. La longitud no estirada de la cuerda es de 11.0 m. La saltadora alcanza el fondo de su movimiento 36.0 m abajo del puente antes de rebotar de regreso. Queremos encontrar el intervalo de tiempo entre que deja el puente y llega al fondo de su movimiento. Su movimiento total se puede separar en una caída libre de 11.0 m y una sección de 25.0 m de oscilación armónica simple. (a) Para la parte de caída libre, ¿cuál es el análisis de modelo adecuado para describir su movimiento? (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en caída libre? (c) Para la parte de oscilación armónica simple de la caída, ¿es el sistema de la saltadora, la cuerda elástica y la Tierra aislado o no aislado? (d) A partir de su respuesta en el inciso (c) encuentre la constante elástica de la cuerda. (e) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza del resorte equilibra la fuerza gravitacional ejercida sobre la saltadora? (f) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? (g) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la cuerda se estire 25.0 m? (h) ¿Cuál es el intervalo de tiempo total para un salto de 36.0 m?

31. **Problema de repaso.** Un bloque de 0.250 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte cuya constante de fuerza es 83.8 N/m, como en la figura P15.31. Una fuerza horizontal $\vec{F}$ hace que el resorte se estire una distancia de 5.46 cm desde su posición de equilibrio. (a) Encuentre la magnitud de $\vec{F}$. (b) ¿Cuál es la energía total almacenada en el sistema cuando se estira el resorte? (c) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque justo después que se retira la fuerza aplicada. (d) Encuentre la rapidez del bloque cuando éste primero alcanza la posición de equilibrio. (e) Si la superficie no es sin fricción, pero el bloque todavía alcanza la posición de equilibrio, sería su respuesta a la parte (d) ¿mayor o menor? (f) ¿Qué otra información necesitaría saber para encontrar la respuesta real del inciso (d) en este caso? (g) ¿Cuál es el valor más grande del coeficiente de fricción que permita al bloque alcanzar la posición de equilibrio?

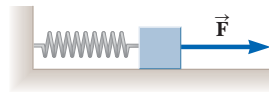


Figura P15.31

32. Un objeto de 326 g se une a un resorte y ejecuta un movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. Si la energía total del sistema es 5.83 J, encuentre (a) la rapidez máxima del objeto, (b) la constante de fuerza del resorte y (c) la amplitud del movimiento.

Sección 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

33. Mientras viaja detrás de un automóvil a 3.00 m/s nota que una de las llantas del automóvil tiene un pequeño chichón en el borde, como se muestra en la figura P15.33. (a) Expli-

que por qué el chichón, desde su punto de vista detrás del automóvil, ejecuta movimiento armónico simple. (b) Si el radio de la llanta del automóvil es de 0.300 m, ¿cuál es el periodo de oscilación del chichón?

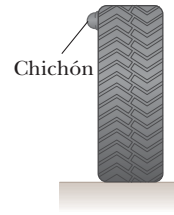


Figura P15.33

Sección 15.5 El péndulo

El problema 68 del capítulo 1 también se puede asignar en esta sección.

34. Un “péndulo segundero” es aquel que se mueve a través de su posición de equilibrio una vez cada segundo. (El periodo del péndulo es precisamente 2 s.) La longitud de un péndulo segundero es de 0.992 7 m en Tokio, Japón, y de 0.994 2 m en Cambridge, Inglaterra. ¿Cuál es la razón de las aceleraciones en caída libre en estas dos ubicaciones?
35. Un péndulo simple hace 120 oscilaciones completas en 3.00 min en un lugar donde $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. Encuentre (a) el periodo del péndulo y (b) su longitud.
36. Una partícula de masa m se desliza sin fricción dentro de un tazón hemisférico de radio R . Demuestre que si la partícula parte del reposo con un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual al de un péndulo simple de longitud R . Es decir, $\omega = \sqrt{g/R}$.
37. Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 0.450 Hz. El péndulo tiene una masa de 2.20 kg y el eje se ubica a 0.350 m del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.
38. Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia f . El péndulo tiene una masa de m y el eje se ubica a una distancia d del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.
39. La posición angular de un péndulo se representa mediante la ecuación $\theta = (0.032 \text{ 0 rad}) \cos \omega t$, donde θ está en radianes y $\omega = 4.43 \text{ rad/s}$. Determine el periodo y la longitud del péndulo.
40. Considere el péndulo físico de la figura 15.17. (a) Represente su momento de inercia en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa y paralelo al eje que pasa a través de su punto de giro como I_{CM} . Demuestre que su periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{CM}} + md^2}{mgd}}$$

donde d es la distancia entre el punto de giro y el centro de masa. (b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{\text{CM}}$.

41. Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Se desplaza a través de un ángulo de 15.0° y luego se libera. Usando el análisis de modelo de partícula en movimiento armónico simple, ¿cuáles son (a) la rapidez máxima, (b) la aceleración angular máxima y (c) la fuerza restauradora máxima? (d) **¿Qué pasaría si?** Resuelva de nuevo los incisos del (a) al (c) usando el análisis de modelos introducidos en los capítulos anteriores. (e) Compare las respuestas.

42. Una barra rígida muy ligera con una longitud de 0.500 m se extiende recta desde un extremo de una regleta. La combinación se suspende de un pivote en el extremo superior de la barra, como se muestra en la figura P15.42. Luego la combinación se jala un ángulo pequeño y se libera. (a) Determine el periodo de oscilación del sistema. (b) ¿En qué porcentaje difiere el periodo del periodo de un péndulo simple de 1.00 m de largo?

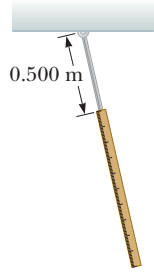


Figura P15.42

43. **Problema de repaso.** Un péndulo simple tiene 5.00 m de longitud. ¿Cuál es el periodo de oscilaciones pequeñas para este péndulo, si se ubica en un elevador que acelera hacia arriba a 5.00 m/s^2 ? (b) ¿Cuál es su periodo si el elevador acelera hacia abajo a 5.00 m/s^2 ? (c) ¿Cuál es el periodo de este péndulo si se coloca en un camión que acelera horizontalmente a 5.00 m/s^2 ?
44. Un objeto pequeño se une al extremo de un resorte para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para pequeños desplazamientos angulares y tres longitudes. Para cada longitud, el intervalo de tiempo para 50 oscilaciones se mide con un cronómetro. Para longitudes de 1.000 m, 0.750 m y 0.500 m se miden intervalos de tiempo totales de 99.8 s, 86.6 s y 71.1 s para 50 oscilaciones. (a) Determine el periodo de movimiento para cada longitud. (b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelas con el valor aceptado. (c) Grafique T^2 con L y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica de línea recta de mejor ajuste. Compare este valor con el obtenido en el inciso (b).

45. El volante de un reloj (figura P15.45) tiene un periodo de oscilación de 0.250 s. La rueda está construida de modo que su masa de 20.0 g se concentra alrededor de un borde de 0.500 cm de radio. ¿Cuáles son (a) el momento de inercia del volante y (b) la constante de torsión del resorte unido?



Figura P15.45

Sección 15.6 Oscilaciones amortiguadas

46. Un péndulo con una longitud de 1.00 m se libera desde un ángulo inicial de 15.0° . Después de 1 000 s su amplitud se reduce por fricción a 5.50° . ¿Cuál es el valor de $b/2m$?

47. Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de $2.05 \times 10^4 \text{ N/m}$. El efecto de la resistencia del aire se representa mediante el coeficiente de amortiguamiento $b = 3.00 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. (a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. (b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? (c) Encuentre el intervalo de tiempo que transcurre mientras la energía del sistema disminuye al 5.00% de su valor inicial.

48. Demuestre que la rapidez de cambio con el tiempo de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no impulsado está dada por $dE/dt = -bv^2$ y por eso siempre es negativa. Para hacerlo, derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, y use la ecuación 15.31.

49. Demuestre que la ecuación 15.32 es una solución de la ecuación 15.31 siempre que $b^2 < 4mk$.

Sección 15.7 Oscilaciones forzadas

50. Una bebé se regocija durante el día haciendo sonidos y rebotando arriba y abajo en su cuna. Su masa es de 12.5 kg y el colchón de la cuna se modela como un resorte ligero con constante de fuerza de 700 N/m. (a) La bebé pronto aprende a rebotar con máxima amplitud y mínimo esfuerzo al doblar sus rodillas, ¿a qué frecuencia? (b) Ella aprende a usar el colchón como trampolín y pierde contacto con él durante parte de cada ciclo, ¿cuándo su amplitud de oscilación mínima supera qué valor?

51. Cuando entra en un buen restaurante se da cuenta que se ha traído de su casa accidentalmente un pequeño temporizador electrónico en vez de su teléfono celular. Frustrado, mete el temporizador en un bolsillo de su saco, sin darse cuenta que el temporizador está funcionando. El brazo de la silla presiona la tela ligera de su abrigo contra su cuerpo en un punto. Tela con una longitud L cuelga libremente por debajo de ese punto, con el cronómetro en la parte inferior. En algún momento durante la cena, el temporizador se apaga y un zumbador y un vibrador encienden y apagan con una frecuencia de 1.50 Hz. Esto hace que la parte que cuelga de su abrigo se mueve hacia adelante y hacia atrás de la oscilación con amplitud notablemente grande, llamando la atención de todo el mundo. Encuentre el valor de L .

52. Un bloque que pesa 40.0 N está suspendido de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema no está amortiguado ($b = 0$) y está sujeto a una fuerza impulsora armónica de 10.0 Hz de frecuencia, lo que resulta en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza impulsora.

53. Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción ($b = 0$) y es impulsado por una fuerza externa dada por $F = 3.00 \sin(2\pi t)$. La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine (a) la frecuencia angular de resonancia del sistema, (b) la frecuencia angular del sistema conducido y (c) la amplitud del movimiento.

54. Si considera un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), demuestre que la ecuación 15.35 es una solución de la ecuación 15.34 con una amplitud dada por la ecuación 15.36.

55. El amortiguamiento es despreciable para un objeto de 0.150 kg que cuelga de un resorte ligero de 6.30 N/m. Una

fuerza sinusoidal, con una amplitud de 1.70 N, impulsa al sistema. ¿A qué frecuencia la fuerza hará vibrar al objeto con una amplitud de 0.440 m?

Problemas adicionales

- 56.** La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la molécula de hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración del H_2 es 1.30×10^{14} Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración del D_2 ? Suponga que la “constante de resorte” de las fuerzas atractivas es la misma para las dos moléculas.
- 57.** Un objeto de masa m se mueve en movimiento armónico simple con 12.0 cm de amplitud en un resorte ligero. Su aceleración máxima es 108 cm/s^2 . Considere m como variable. (a) Encuentre el periodo T del objeto. (b) Encuentre su frecuencia f . (c) Halle la rapidez máxima $v_{\text{máx}}$ del objeto. (d) Localice la energía E del sistema objeto-resorte. (e) Encuentre la constante de fuerza k del resorte. (f) Describa el patrón de dependencia de cada una de las cantidades T , f , $v_{\text{máx}}$, E y k en m .
- 58. Problema de repaso.** Este problema extiende el razonamiento del problema 75 del capítulo 9. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. El deslizador 1 tiene masa $m_1 = 0.240 \text{ kg}$ y se mueve hacia la derecha con una rapidez de 0.740 m/s . Tendrá una colisión posterior con el deslizador número 2, de masa $m_2 = 0.360 \text{ kg}$, que tiene rapidez hacia la derecha de 0.120 m/s . Un resorte ligero con constante de fuerza de 45.0 N/m se une al extremo posterior del deslizador 2, como se muestra en la figura P9.75. Cuando el deslizador 1 toca el resorte, un súper pegamento hace que instantánea e inmediatamente se pegue a su extremo del resorte. (a) Encuentre la rapidez común que tienen los dos deslizadores cuando la compresión del resorte es un máximo. (b) Encuentre la distancia máxima de compresión de resorte. El movimiento después que los planeadores se unen consiste en una combinación de (1) el movimiento de velocidad constante del centro de masa del sistema de los dos planeadores encontrados en el inciso (a), y (2) el movimiento armónico simple de los planeadores con respecto al centro de masa. (c) Encuentre la energía del movimiento del centro de masa. (d) Encuentre la energía de oscilación.

- 59.** Una bola pequeña de masa M está unida al extremo de una barra uniforme de igual masa M y longitud L que está articulada en la parte superior (figura P15.59). Determine las tensiones en la barra (a) en el pivote y (b) en el punto P cuando el sistema es estacionario. (c) Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos desde el equilibrio y (d) determine este periodo para $L = 2.00 \text{ m}$.

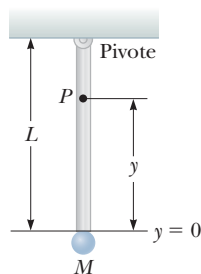


Figura P15.59

- 60. Problema de repaso.** Una roca descansa sobre una acera de concreto. Se presenta un terremoto, que mueve al suelo verticalmente en movimiento armónico con una frecuencia constante de 2.40 Hz y con amplitud gradualmente creciente. (a) ¿Con qué amplitud vibra el suelo cuando la roca comienza a perder contacto con la acera? Otra roca está asentada sobre el concreto en el fondo de una alberca

llena con agua. El terremoto sólo produce movimiento vertical, así que el agua no salpica de lado a lado. (b) Presente un argumento convincente de que, cuando el suelo vibra con la amplitud encontrada en el inciso (a), la roca sumergida también apenas pierde contacto con el suelo de la alberca.

- 61.** Cuatro personas, cada una con una masa de 72.4 kg , están en un auto con una masa de 1130 kg . Un terremoto impacta. Las oscilaciones verticales de la superficie del suelo hacen que el auto rebote hacia arriba y hacia abajo sobre sus resortes de suspensión, pero el conductor logra salir del camino y parar. Cuando la frecuencia del temblor es 1.80 Hz , el auto presenta una amplitud máxima de vibración. Al terminar el terremoto las cuatro personas salen del auto tan rápido como pueden. ¿Qué longitud se levanta la suspensión no dañada del auto conforme la gente sale?
- 62.** Considere la velocidad con que camina un animal bípedo o cuadrúpedo, modele una pierna que no está contactando a la tierra como una barra uniforme de longitud ℓ , que se hace pivotar como un péndulo físico a través de una mitad de ciclo, en resonancia. Sea que $\theta_{\text{máx}}$ represente su amplitud. (a) Demuestre que la rapidez del animal está dada por la expresión

$$v = \frac{\sqrt{6g\ell} \sin \theta_{\text{máx}}}{\pi}$$

Si $\theta_{\text{máx}}$ es lo suficientemente pequeño que el movimiento es casi armónico simple. Una relación empírica que se basa en el mismo modelo y se aplica en un gran rango de ángulos es

$$v = \frac{\sqrt{6g\ell} \cos(\theta_{\text{máx}}/2) \sin \theta_{\text{máx}}}{\pi}$$

(b) Evalúe la rapidez con que camina un ser humano con una pierna de longitud 0.850 m y una amplitud de balanceo de pierna de 28.0° . ¿Qué longitud de pierna daría el doble de la rapidez para la misma amplitud angular?

- 63.** La aceleración de caída libre en Marte es 3.7 m/s^2 . (a) ¿Qué longitud tiene el péndulo de periodo 1.0 s en la Tierra? (b) ¿Qué longitud tendría el péndulo de periodo 1.0 s en Marte? Un objeto está suspendido de un resorte con fuerza constante 10 N/m . Encuentre la masa suspendida de este resorte que daría como resultado un periodo de 1.0 s (c) en la Tierra y (d) en Marte.
- 64.** Un objeto unido a un resorte vibra con movimiento armónico simple según lo descrito por la figura P15.64. Para este movimiento, encuentre (a) la amplitud, (b) el periodo, (c) la frecuencia angular, (d) la rapidez máxima, (e) la ace-

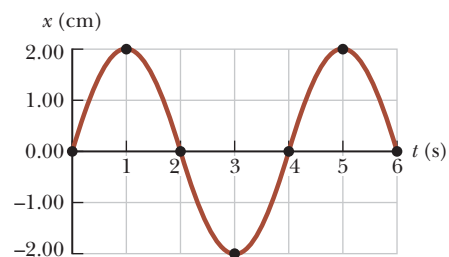


Figura P15.64

lación máxima y (f) una ecuación para su posición x en función del tiempo.

- 65. Problema de repaso.** Un gran bloque P unido a un resorte ideal realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción, con una frecuencia $f = 1.50$ Hz. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.65, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es $\mu_s = 0.600$. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque B no se desliza?

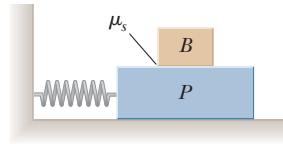


Figura P15.65
Problemas 65 y 66.

- 66. Problema de repaso.** Un gran bloque P realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción con una frecuencia f . El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.65, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es μ_s . ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener si el bloque B no se desliza?

- 67.** Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte con constante de fuerza k conectado a él a una distancia h bajo su punto de suspensión (figura P15.67). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para pequeños valores de la amplitud (θ pequeño). Suponga que la barra de suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.

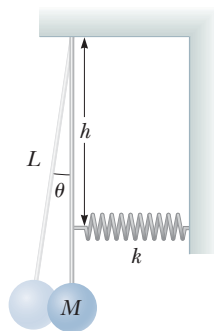


Figura P15.67

- 68.** Un bloque de masa m se conecta a dos resortes con constantes de fuerza k_1 y k_2 en dos formas, como se muestra en la figura P15.68. En ambos casos el bloque se mueve sobre una mesa sin fricción después de desplazarse desde el equilibrio y liberarse. Demuestre que en los dos casos el bloque muestra movimiento armónico simple con periodos

$$(a) T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} \quad \text{y} \quad (b) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

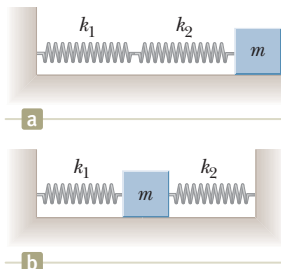


Figura P15.68

- 69.** Un tablón horizontal de masa 5.00 kg y longitud 2.00 m se pivotea en un extremo. El otro extremo del tablón está sostenido por un resorte con constante de fuerza 100 N/m (figura P15.69). El tablón se desplaza un ángulo pequeño θ desde su posición de equilibrio horizontal y se libera.

Encuentre la frecuencia angular con que el tablón se mueve con movimiento armónico simple.

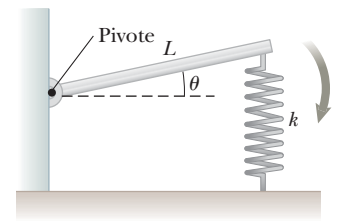


Figura P15.69

Problemas 69 y 70.

- 70.** Un tablón horizontal de masa m y longitud L se pivotea en un extremo. El otro extremo del tablón está sostenido por un resorte con constante de fuerza k (figura P15.69). El tablón se desplaza un ángulo pequeño θ desde su posición de equilibrio horizontal y se libera. Encuentre la frecuencia angular con la que el tablón se mueve con movimiento armónico simple.
- 71. Problema de repaso.** Una partícula de 4.00 kg de masa está unida a un resorte con una constante de fuerza de 100 N/m. Oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 2.00 m. Un objeto de 6.00 kg se deja caer verticalmente en la parte superior del objeto de 4.00 kg mientras pasa a través de su punto de equilibrio. Los dos objetos quedan pegados. (a) ¿Por cuánto cambia la amplitud del sistema en vibración como resultado de la colisión? (b) ¿Por cuánto cambia el periodo del sistema? (c) ¿Por cuánto cambia la energía del sistema como un resultado de la colisión? (d) Estime el cambio en energía.
- 72.** Una bola de masa m se conecta a dos bandas de hule de longitud L , cada una bajo tensión T , como se muestra en la figura P15.72. La bola se desplaza una pequeña distancia y y perpendicular a la longitud de las bandas de hule. Si supone que la tensión no cambia, demuestre que (a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$, y (b) el sistema muestra movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

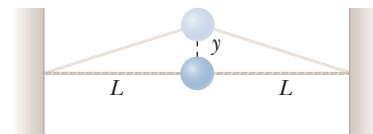


Figura P15.72

- 73. Problema de repaso.** Un extremo de un resorte ligero, con constante de fuerza de $k = 100$ N/m, se une a una pared vertical. Una cuerda ligera se amarra al otro extremo del resorte horizontal, como se ve en la figura P15.73. La cuerda cambia de horizontal a vertical conforme pasa sobre una polea sólida de masa M con forma de un disco sólido de radio $R = 2.00$ cm. La polea es libre de girar sobre un eje fijo uniforme. La sección vertical de la cuerda sostiene un objeto de masa $m = 200$ g. La cuerda no se desliza en su contacto con la polea. El objeto se jala hacia abajo una pequeña distancia y se libera. (a) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de oscilación del objeto en términos de la masa M ? (b) ¿Cuál es el mayor valor posible de la frecuencia angular de osci-

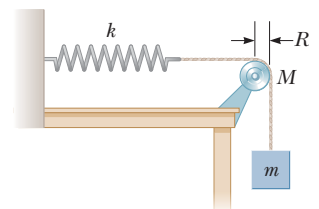


Figura P15.73

lación del objeto? (c) ¿Cuál es el mayor valor posible de la frecuencia angular de oscilación del objeto si se duplica el radio de la polea a $R = 4.00$ cm?

74. Quienes viajan en motocicletas y bicicletas aprenden a prestar atención a los baches en el camino, y en especial a las *tablas de lavar*, una condición en la que muchos bordes igualmente espaciados se forman en el camino. ¿Qué es tan malo en las tablas de lavar? Una motocicleta tiene muchos resortes y amortiguadores en su suspensión, pero usted puede modelarla como un solo resorte que sostiene un bloque. Puede estimar la constante de fuerza al pensar en cuánto se comprime el resorte cuando un motociclista pesado conduce. Un motociclista que viaja con rapidez de carretera debe tener particular cuidado de los baches en forma de tablas de lavar que están separados cierta distancia. ¿Cuál es el orden de magnitud de su distancia de separación?
75. Un péndulo simple con una longitud de 2.23 m y una masa de 6.47 kg recibe una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que experimenta un movimiento armónico simple. Determine su (a) periodo, (b) energía total y (c) máximo desplazamiento angular.
76. Cuando un bloque de masa M , conectado al extremo de un resorte de masa $m_s = 7.40$ g y constante de fuerza k , se pone en movimiento armónico simple, el periodo de su movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m_s/3)}{k}}$$

Se conduce un experimento en dos partes con el uso de bloques de diferentes masas suspendidas verticalmente del resorte, como se muestra en la figura P15.76. (a) Extensiones estáticas de 17.0, 29.3, 35.3, 41.3, 47.1 y 49.3 cm se miden para valores de M de 20.0, 40.0, 50.0, 60.0, 70.0 y 80.0 g, respectivamente. Construya una gráfica de Mg con x y realice un ajuste lineal por mínimos cuadrados a los datos. (b) De la pendiente de su gráfica, determine un valor para k de este resorte. (c) El sistema ahora se pone en movimiento armónico simple y se miden los periodos con cronómetro. Con $M = 80.0$ g, el intervalo de tiempo total requerido para 10 oscilaciones se mide en 13.41 s. El experimento se repite con valores M de 70.0, 60.0, 50.0, 40.0 y 20.0 g, con intervalos de tiempo correspondientes para diez oscilaciones de 12.52, 11.67, 10.67, 9.62 y 7.03 s. Realice una tabla con estas masas y tiempos. (d) Calcule el valor experimental para T a partir de cada una de estas mediciones. (e) Trace una gráfica de T^2 con M y (f) determine un valor para k a partir de la pendiente del ajuste lineal de mínimos cuadrados a través de los puntos de datos. (g) Compare este valor de k con el obtenido en el inciso (b). (h) Obtenga un valor para m_s a partir de su gráfica y compárelo con el valor conocido de 7.40 g.

Figura P15.76



la figura P15.77b, y se libera, (a) demuestre que el movimiento es armónico simple y (b) determine el periodo del movimiento. Tome la densidad del aire de 1.20 kg/m^3 . Sugerencia: utilice una analogía con el péndulo simple y vea el capítulo 14. Suponga que el aire aplica una fuerza de flotación en el globo que no afecta su movimiento.

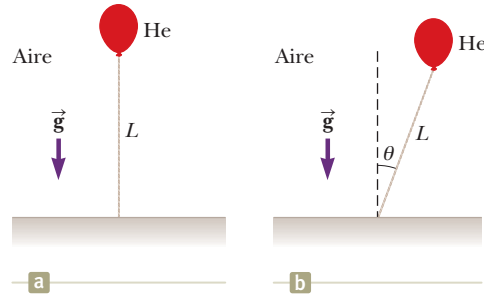


Figura P15.77

78. Considere el oscilador amortiguado que se muestra en la figura 15.20. La masa del objeto es 375 g, la constante de resorte es 100 N/m y $b = 0.100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la amplitud disminuye a la mitad de su valor inicial? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Durante qué intervalo de tiempo la energía mecánica disminuye a la mitad de su valor inicial? (c) Demuestre que, en general, la relación fraccionaria a la cual la amplitud disminuye en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la relación fraccionaria a la que disminuye la energía mecánica.
79. Una partícula con una masa de 0.500 kg está unida a un resorte con una constante de fuerza de 50.0 N/m . En el momento que $t = 0$ la partícula tiene su rapidez máxima de 20.0 m/s y se mueve hacia la izquierda. (a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula y especifique su posición como función del tiempo. (b) ¿Dónde, en el movimiento, la energía potencial es tres veces la energía cinética? (c) Encuentre el intervalo de tiempo mínimo requerido para que la partícula se mueva de $x = 0$ a $x = 1.00 \text{ m}$. (d) Encuentre la longitud de un péndulo simple con el mismo periodo.
80. Su pulgar rechina en un plato que acaba de lavar. Sus zapatos tenis rechinan en el piso del gimnasio. Las llantas de los autos rechinan con un arranque o frenado abrupto. Usted puede hacer cantar a una copa al secar su dedo humedecido alrededor de su borde. Cuando el gis rechina en un pizarrón, usted puede ver que hace una hilera de rayas regularmente espaciadas. Como sugieren estos ejemplos, la vibración comúnmente resulta cuando la fricción actúa sobre un objeto elástico en movimiento. La oscilación no es un movimiento armónico simple, sino que se llama *pegar y deslizar*. Este problema modela un movimiento de pegar y deslizar.

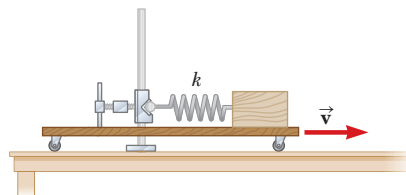


Figura P15.80

Un bloque de masa m se une a un soporte fijo mediante un resorte horizontal, con constante de fuerza k y masa despreciable (figura P15.80). La ley de Hooke describe el resorte tanto en extensión como en compresión. El bloque descansa sobre una larga tabla horizontal, con la que tiene coeficiente de fricción estático μ_s y un coeficiente de fricción cinética μ_k menor. La tabla se mueve hacia la derecha con rapidez constante v . Suponga que el bloque pasa la mayor parte de su tiempo pegado a la tabla y en movimiento hacia la derecha, de modo que la rapidez v es pequeña en comparación con la rapidez promedio que tiene el bloque mientras se desliza de regreso hacia la izquierda. (a) Demuestre que la máxima extensión del resorte, desde su posición no estirada, es muy cercana a la que se conoce mediante $\mu_s mg/k$. (b) Demuestre que el bloque oscila en torno a una posición de equilibrio en la que el resorte se estira en $\mu_k mg/k$. (c) Grafique la posición del bloque con el tiempo. (d) Demuestre que la amplitud del movimiento del bloque es

$$A = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k}$$

(e) Demuestre que el periodo del movimiento del bloque es

$$T = \frac{2(\mu_s - \mu_k)mg}{vk} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Este exceso de fricción estática sobre la fricción cinética es importante para la vibración. “La rueda chirriante obtiene la grasa” porque ni siquiera un fluido viscoso puede ejercer una fuerza de fricción estática.

81. **Problema de repaso.** Una boya de langostero es un cilindro de madera sólida de radio r y masa M a la cual se le coloca peso en un extremo, de modo que flote vertical en agua de mar tranquila, que tiene densidad ρ . Un tiburón que pasa tensa la sogla floja que amarra la boya a una trampa de langosta y jala la boya una distancia x desde su posición de equilibrio y la libera. (a) Demuestre que la boya ejecutará movimiento armónico simple si se ignoran los efectos resistivos del agua y (b) determine el periodo de las oscilaciones.

82. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Su trabajo implica la construcción de osciladores amortiguados muy pequeños. Uno de sus diseños consiste en un oscilador de resorte-objeto con un resorte de constante de fuerza $k = 10.0$ N/m y un objeto de masa $m = 1.00$ g. El objetivo del diseño es que el oscilador experimente muchas oscilaciones conforme su amplitud disminuye al 25.0% de su valor inicial en un cierto intervalo de tiempo. Las mediciones en su más reciente diseño demuestran que la amplitud cae al valor del 25.0% en 23.1 ms. Este intervalo de tiempo es demasiado largo para lo que necesita en su proyecto. Para acortar el intervalo de tiempo, se duplica la constante b de amortiguamiento para el oscilador. Esta duplicación permite alcanzar su objetivo de diseño.

83. Dos bolas de acero, cada una de 67.4 cm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5.00 m/s. Chocan de manera frontal y rebotan elásticamente. Apretando una de las bolas en la prensa mientras se realizan mediciones precisas de la cantidad resultante de la compresión, encontrará que la ley de Hooke es un buen modelo del com-

portamiento elástico de la bola. Una fuerza de 16.0 kN que ejerce cada mandíbula de la prensa reduce el diámetro en 0.200 mm. Modele el movimiento de cada bola, mientras las bolas están en contacto, como la mitad de un ciclo de movimiento armónico simple. Calcule el intervalo de tiempo durante el cual las bolas están en contacto. (Si usted resolvió el problema 57 del capítulo 7, compare los resultados de este problema con los resultados de ése.)

Problemas de desafío

84. Un pequeño disco de radio r y masa m se pega rigidamente a la cara de un segundo disco más grande de radio R y masa M , como se muestra en la figura P15.84. El centro del disco pequeño se ubica en el borde del disco grande. El disco grande se monta en su centro en un eje sin fricción. El ensamble da vueltas a través de un pequeño ángulo θ desde su posición de equilibrio y se libera. (a) Demuestre que mientras pasa a través de la posición de equilibrio la rapidez del centro del disco pequeño es

$$v = 2 \left[\frac{Rg(1 - \cos \theta)}{(M/m) + (r/R)^2 + 2} \right]^{1/2}$$

- (b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi \left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR} \right]^{1/2}$$

85. Un objeto de masa $m_1 = 9.00$ kg está en equilibrio, conectado a un resorte ligero de constante $k = 100$ N/m que está sujeto a una pared, como se muestra en la figura P15.85a. Un segundo objeto, $m_2 = 7.00$ kg, se empuja lentamente contra m_1 , lo que comprime al resorte la cantidad $A = 0.200$ m (vea la figura P15.85b). Luego el sistema se libera y ambos objetos comienzan a moverse hacia la dere-

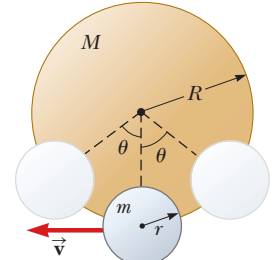


Figura P15.84

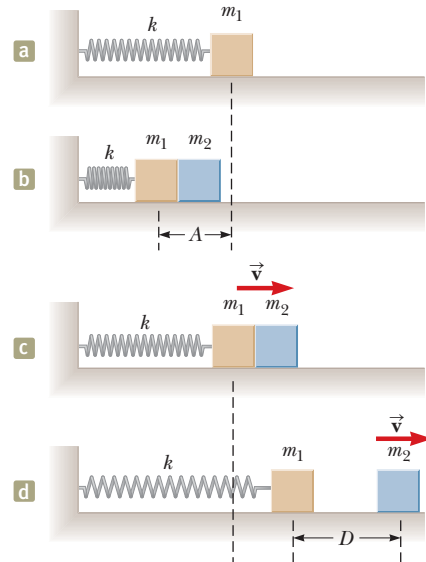


Figura P15.85

cha sobre la superficie sin fricción. (a) Cuando m_1 alcanza el punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (vea la figura P15.85c) y se mueve hacia la derecha con rapidez v . Determine el valor de v . (b) ¿Qué tan separados están los objetos cuando el resorte se estira completamente por primera vez (distancia D en la figura P15.85d)?

- 86. Problema de repaso.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Usted está en el negocio de entrega de paquetes con alta rapidez. Su competidor en el edificio contiguo adquiere el derecho de construir un túnel evacuado que pasa justo encima del suelo alrededor de la Tierra. Enviando los paquetes en el túnel a la rapidez correcta, su competidor es capaz de enviar los paquetes en la órbita alrededor de la Tierra en este túnel para que lleguen al lado opuesto exacto en un intervalo de tiempo muy corto. Usted tiene una idea para competir. Pensando que la distancia *a través de la Tierra* es más corta que la distancia *alrededor de la Tierra*, obtiene permisos para construir un túnel evacuado a través del centro de la Tierra (figura P15.86). Para que simplemente al soltar los paquetes en este túnel caigan hacia abajo y lleguen al otro extremo de su túnel, que se encuentra en un edificio justo al lado del otro extremo del túnel de su competidor. Puesto que los paquetes llegan al otro lado de la Tierra en un intervalo de tiempo corto, usted gana el concurso y su negocio florece. *Nota:* un objeto a una distancia r del centro de la Tierra es jalado hacia el centro de la Tierra solamente por la masa dentro de la esfera de radio r (la región roja en la figura P15.86); la Tierra tiene densidad uniforme.

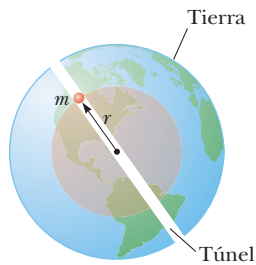


Figura P15.86

- 87.** Un bloque de masa M está conectado a un resorte de masa m y oscila en movimiento armónico simple en una pista sin rozamiento horizontal (figura P15.87). La constante de

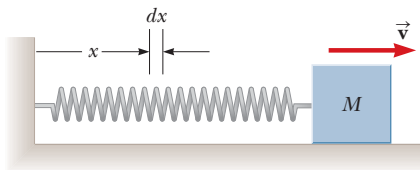


Figura P15.87

fuerza del resorte es k y la longitud de equilibrio es ℓ . Suponga que todas las partes del resorte oscilan en fase y que la velocidad de un segmento del resorte de longitud dx es proporcional a la distancia x desde el extremo fijo; es decir, $v_x = (x/\ell)v$. También observe que la masa de un segmento del resorte es $dm = (m/\ell)dx$. Encuentre (a) la energía cinética del sistema cuando el bloque tiene una velocidad v y (b) el periodo de la oscilación.

- 88.** Problema de repaso. Un sistema consta de un resorte con constante de fuerza $k = 1\,250$ N/m, longitud $L = 1.50$ m y un objeto de masa $m = 5.00$ kg unido al extremo (figura P15.88). El objeto se coloca en el nivel del punto de fijación con el resorte sin estirar, en posición $y_i = L$, y luego se libera de modo que balancea como un péndulo. (a) Encuentre la posición y del objeto en el punto más bajo. (b) ¿El periodo del péndulo será mayor o menor que el periodo de un péndulo simple con la misma masa m y longitud L ? Explique.

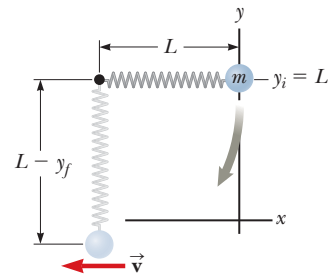


Figura P15.88

- 89.** Un contenedor ligero cúbico de volumen a^3 inicialmente está lleno con un líquido de densidad de masa ρ , como se muestra en la figura P15.89a. El cubo es soportado inicialmente por una cuerda ligera para formar un péndulo simple de longitud L_i , medido desde el centro de masa del recipiente lleno, donde $L_i \gg a$. El líquido puede fluir desde el fondo del recipiente a razón constante (dM/dt) . En cualquier tiempo t el nivel del líquido en el recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida con respecto al centro de masa instantánea), como se muestra en la figura P15.89b. (a) Encuentre el periodo del péndulo en función del tiempo. (b) ¿Cuál es el periodo del péndulo después que el líquido sale completamente del recipiente?

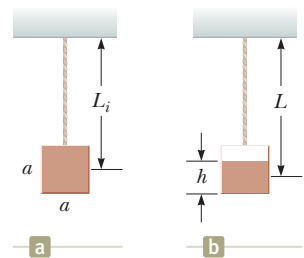


Figura P15.89

Movimiento ondulatorio

CAPÍTULO

16



- 16.1 Propagación de una perturbación
- 16.2 Análisis de modelo: onda viajera
- 16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas
- 16.4 Reflexión y transmisión
- 16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas
- 16.6 La ecuación de onda lineal

De niños, la mayoría de las personas experimentaron lo que es una onda cuando lanzaron una piedra a un estanque. En el punto donde la piedra choca con la superficie del agua se crean ondas circulares. Estas ondas se mueven hacia fuera, a partir del punto de creación, en círculos que se expanden hasta que alcanzan la orilla. Si usted examinara con detenimiento el movimiento de un pequeño objeto que flota sobre el agua perturbada, vería que el objeto se mueve vertical y horizontalmente en torno a su posición original, sin experimentar un desplazamiento neto desde o hacia el punto donde la piedra golpea el agua. Los pequeños elementos del agua en contacto con el objeto, así como todos los otros elementos de agua sobre la superficie del estanque, se comportan de la misma forma. Es decir, la onda acuática se mueve desde el punto de origen hacia la orilla, pero el agua no se va con ella.

El mundo está lleno de ondas, los dos tipos principales son las ondas *mecánicas* y las ondas *electromagnéticas*. En el caso de ondas mecánicas, algunos medios físicos se perturban; en el ejemplo de la piedra, los elementos del agua se perturban. Las ondas electromagnéticas no requieren un medio para propagarse; algunos ejemplos de ondas electromagnéticas son la luz visible, las ondas de radio, las señales de televisión y los rayos X. En esta parte del libro se estudiarán sólo las ondas mecánicas.

Considere de nuevo el pequeño objeto que flota sobre el agua. Se hizo que el objeto se moviera en un punto en el agua al dejar caer una piedra en otra posición. El objeto ganó energía cinética a causa de esta acción, así que la energía se debió transferir desde el punto donde se dejó caer la piedra hasta la posición del objeto. Esta característica es básica en un movimiento ondulatorio: la *energía* se transfiere a través de una distancia, pero la *materia* no.

Salvavidas en Nueva Gales del Sur, Australia, practican el dominio de su lancha sobre grandes olas que rompen cerca de la orilla. Una onda moviéndose en la superficie del agua es un ejemplo de onda mecánica.

(Travel Ink/Gallo Images/Getty Images)

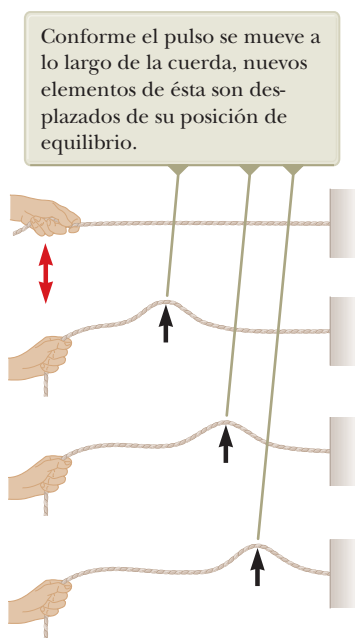


Figura 16.1 Una mano mueve una vez, hacia arriba y hacia abajo, el extremo de una cuerda estirada (flecha roja), generando un pulso que viaja a lo largo de la cuerda.

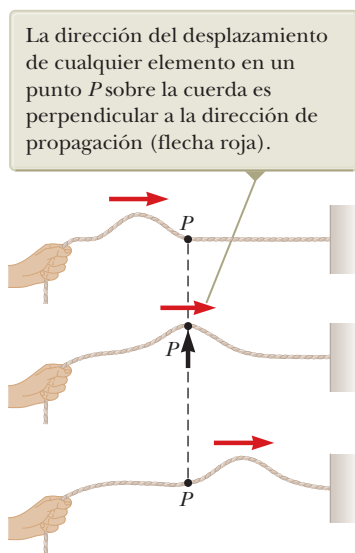


Figura 16.2 Desplazamiento de un elemento particular de la cuerda para un pulso transversal viajando en una cuerda estirada.

Figura 16.3 Un pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado.

16.1 Propagación de una perturbación

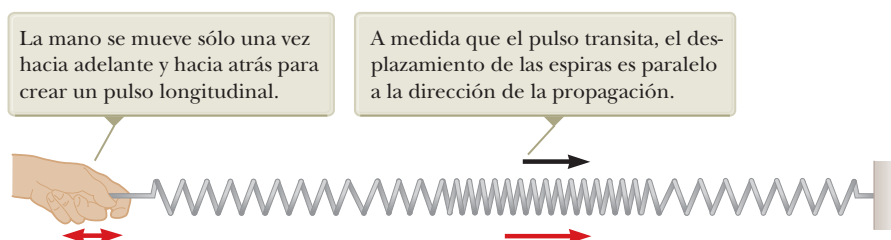
En la introducción a este capítulo se aludió a la esencia del movimiento ondulatorio: la transferencia de energía a través del espacio sin el acompañamiento de transferencia de materia. En la lista de mecanismos de transferencia de energía del capítulo 8, dos mecanismos, ondas mecánicas y radiación electromagnética, dependen de las ondas. En contraste, en otro mecanismo, la transferencia de materia, la transferencia de energía está acompañada por un movimiento de materia a través del espacio sin algún carácter ondulatorio en el proceso.

Todas las ondas mecánicas requieren (1) alguna fuente de perturbación, (2) un medio que contenga elementos que puedan ser perturbados y (3) algún mecanismo físico a partir del cual los elementos del medio puedan influirse mutuamente. Una forma de demostrar el movimiento ondulatorio es sacudir un extremo de una larga cuerda que esté bajo tensión y tenga su extremo opuesto fijo, como se muestra en la figura 16.1. De esta manera, se forma un solo chichón (llamado *pulso*) que viaja a lo largo de la cuerda con una rapidez definida. La figura 16.1 representa cuatro “instantáneas” consecutivas de la creación y propagación del pulso progresivo. La mano es la fuente de la perturbación. La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso, los elementos individuales de la cuerda son perturbados de su posición de equilibrio. Aún más, los elementos de la cuerda están conectados entre sí, de modo que se influyen mutuamente. El pulso tiene una altura y una rapidez de propagación definidas a lo largo del medio. La forma del pulso cambia muy poco a medida que viaja a lo largo de la cuerda.¹

Primero estudiaremos un pulso que viaja a través de un medio. Una vez que se explore el comportamiento de un pulso, estudiaremos a una *onda*, que es una perturbación *periódica* que viaja a través de un medio. Al sacudir el extremo de la cuerda una vez se crea un pulso en ella, como en la figura 16.1. Si se moviera el extremo de la cuerda hacia arriba y hacia abajo repetidamente se crearía una onda viajera (progresiva) con características que no tiene un pulso. En la sección 16.2 se explorarán estas características.

A medida que viaja el pulso de la figura 16.1, cada elemento perturbado de la cuerda se mueve en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. La figura 16.2 ilustra este punto para un elemento particular, etiquetado *P*. Observe que nunca alguna parte de la cuerda se mueve en la dirección de propagación. Una onda viajera o pulso que hace que los elementos del medio perturbado se muevan perpendiculares a la dirección de propagación se llama **onda transversal**.

Compare esta onda con otro tipo de pulso, uno que se mueve por un largo resorte estirado, como se muestra en la figura 16.3. El extremo izquierdo del resorte recibe un ligero empuje hacia la derecha y después recibe un ligero jalón hacia la izquierda. Este movimiento crea una súbita compresión de una región de las espiras. La región comprimida viaja a lo largo del resorte (a la derecha en la figura 16.3). Observe que la dirección del desplazamiento de las espiras es *paralela* a la dirección de propagación de la región comprimida. Una onda viajera o pulso que mueve a los elementos del medio en paralelo a la dirección de propagación se llama **onda longitudinal**.



¹ En realidad, el pulso cambia de forma y gradualmente se dispersa durante el movimiento. Este efecto, llamado *dispersión*, es común a muchas ondas mecánicas, así como a ondas electromagnéticas. En este capítulo no se considera la dispersión.

Las ondas sonoras, que se explicarán en el capítulo 17, son otro ejemplo de ondas longitudinales. La perturbación en una onda sonora es una serie de regiones de alta y baja presiones que viajan en el aire.

Algunas ondas en la naturaleza presentan una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. Las ondas en la superficie del agua son un buen ejemplo. Cuando una onda acuática viaja sobre la superficie del agua profunda, los elementos del agua en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares, como se muestra en la figura 16.4. La perturbación tiene componentes tanto transversales como longitudinales. Los desplazamientos transversales que se ven en la figura 16.4 representan las variaciones en posición vertical de los elementos del agua. Los desplazamientos longitudinales representan elementos de agua móvil de atrás para adelante en una dirección horizontal.

Las ondas tridimensionales que viajan desde un punto debajo de la superficie de la Tierra, donde se presenta un terremoto, son de ambos tipos, transversales y longitudinales. Las ondas longitudinales son las más rápidas de las dos y viajan con magnitudes de rapidez en el rango de 7 a 8 km/s cerca de la superficie. Se llaman **ondas P**, donde “P” es por *primarias*, porque viajan más rápido que las ondas transversales y llegan primero a un sismógrafo (dispositivo empleado para detectar ondas debidas a terremotos). Las ondas transversales más lentas, llamadas **ondas S**, donde “S” es para *secundarias*, viajan a través de la Tierra a 4 o 5 km/s cerca de la superficie. Al registrar en un sismógrafo el intervalo de tiempo entre las llegadas de estos dos tipos de ondas, se determina la distancia desde el sismógrafo al punto de origen de las ondas. Esta distancia es el radio de una esfera imaginaria centrada en el sismógrafo. El origen de las ondas se localiza en alguna parte sobre dicha esfera. Las esferas imaginarias desde tres o más estaciones de monitoreo, ubicadas muy separadas entre sí, se intersecan en una región de la Tierra, y esta región es donde ocurrió el terremoto.

Considere un pulso que viaja hacia la derecha en una cuerda larga, como se muestra en la figura 16.5. La figura 16.5a representa la forma y posición del pulso al tiempo $t = 0$. En este instante la forma del pulso, cualquiera que sea, se puede representar mediante alguna función matemática que se escribirá como $y(x, 0) = f(x)$. Esta función describe la posición transversal y del elemento de la cuerda ubicado en cada valor de x en el tiempo $t = 0$. Ya que la rapidez del pulso es v , el pulso viajó hacia la derecha una distancia vt en el tiempo t (figura 16.5b). Se supone que la forma del pulso no cambia con el tiempo. Por lo tanto, al tiempo t la forma del pulso es la misma que tenía en $t = 0$, como en la figura 16.5a. En consecuencia, un elemento de la cuerda en x en este tiempo tiene la misma posición y que un elemento ubicado en $x - vt$ tenía en $t = 0$:

$$y(x, t) = y(x - vt, 0)$$

En general, se puede representar la posición transversal y para todas las posiciones y tiempos, medida en un marco estacionario con el origen en O , como

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (16.1)$$

De igual modo, si el pulso viaja hacia la izquierda, las posiciones transversales de los elementos de la cuerda se describen mediante:

$$y(x, t) = f(x + vt) \quad (16.2)$$

La función y , algunas veces llamada **función de onda**, depende de las dos variables x y t . Por esta razón, con frecuencia se escribe $y(x, t)$, que se lee “ y como una función de x y t ”.

Es importante entender el significado de y . Considere un elemento de la cuerda en el punto P de la figura 16.5, identificado mediante un valor particular de su coordenada x . Mientras el pulso pasa por P , la coordenada y de este elemento aumenta, llega a un máximo y luego disminuye a cero. La función de onda $y(x, t)$ representa la coordenada y , la posición transversal, de cualquier elemento ubicado en la posición x en cualquier tiempo t . Además, si t es fijo (como en el caso de tomar una instantánea del pulso), la función de onda $y(x)$, algunas veces llamada **forma de onda**, define una curva que representa la forma geométrica del pulso en dicho tiempo.

Los elementos en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares. Cada elemento se desplaza tanto vertical como horizontalmente respecto de su posición de equilibrio.

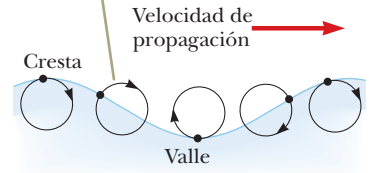


Figura 16.4 El movimiento de los elementos del agua sobre la superficie del agua profunda, en la que una onda se propaga, es una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales.

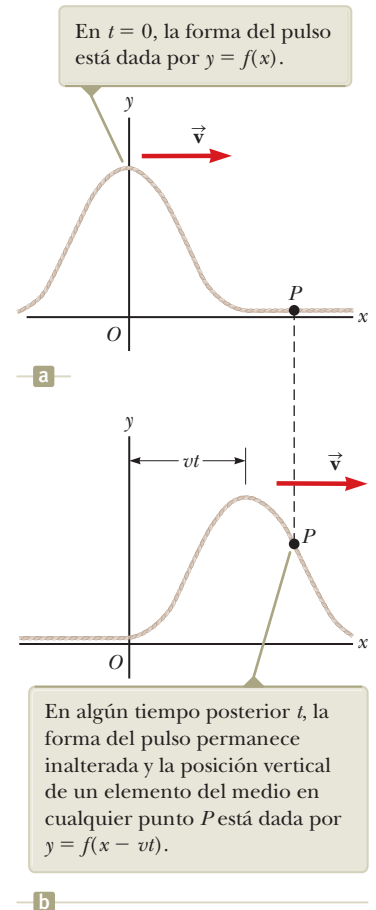


Figura 16.5 Un pulso unidimensional que viaja, con rapidez v , hacia la derecha en una cuerda.

Ejamen rápido 16.1 (i) En una larga fila de personas que esperan comprar boletos, la primera persona sale y un pulso de movimiento se presenta a medida que la gente avanza para llenar el hueco. A medida que cada persona avanza, el hueco se mueve a través de la fila. La propagación de este hueco es, ¿(a) transversal o (b) longitudinal? (ii) Considere la “ola” en un juego de béisbol: las personas se ponen de pie y levantan sus brazos a medida que la ola llega a sus posiciones, y el pulso resultante se mueve alrededor del estadio. Esta onda es, ¿(a) transversal o (b) longitudinal?

Ejemplo 16.1 Un pulso que se mueve hacia la derecha

Un pulso que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x se representa mediante la función de onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3.0t)^2 + 1}$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos. Encuentre expresiones para la función de onda en $t = 0$, $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

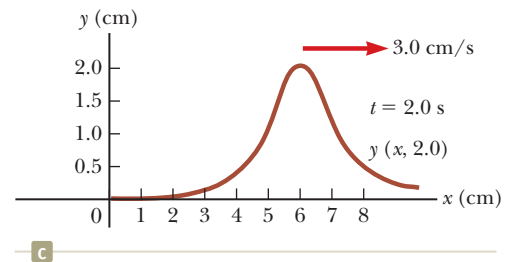
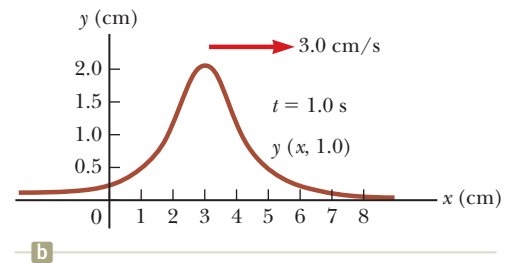
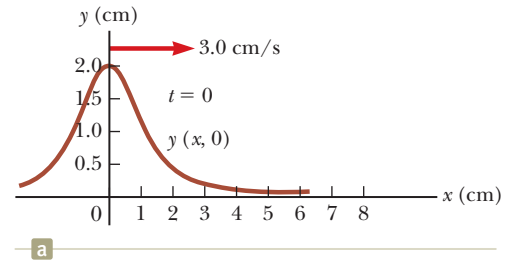
SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.6a muestra el pulso representado por esta función de onda en $t = 0$. Imagine que este pulso se mueve hacia la derecha con una rapidez de 3.0 cm/s y mantiene su forma, como sugieren las figuras 16.6b y 16.6c.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis relativamente simple en el que se interpreta la representación matemática de un pulso.

Analizar La función de onda es de la forma $y = f(x - vt)$. La inspección de la expresión para $y(x, t)$ y la comparación con la ecuación 16.1 revela que la rapidez de la onda es $v = 3.0$ cm/s. Además, al hacer $x - 3.0t = 0$ se encuentra que el valor máximo de y está dado por $A = 2.0$ cm.

Figura 16.6 (Ejemplo 16.1) Gráficas de la función $y(x, t) = 2/[(x - 3.0t)^2 + 1]$ en (a) $t = 0$, (b) $t = 1.0$ s y (c) $t = 2.0$ s.



Escriba la expresión para la función de onda en $t = 0$:

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 1.0$ s:

$$y(x, 1.0) = \frac{2}{(x - 3.0)^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 2.0$ s:

$$y(x, 2.0) = \frac{2}{(x - 6.0)^2 + 1}$$

Para cada una de estas expresiones se pueden sustituir diversos valores de x y trazar la gráfica de la función de onda. Este procedimiento genera las funciones de onda mostradas en las tres partes de la figura 16.6.

Finalizar Estas instantáneas muestran que el pulso se mueve hacia la derecha sin cambiar su forma y que tiene una rapidez constante de 3.0 cm/s.

¿QUÉ PASARÍA SI? Si la función de onda fuese

$$y(x, t) = \frac{4}{(x + 3.0t)^2 + 1}$$

¿Cómo cambiaría la situación?

Respuesta Una nueva característica en esta expresión es el signo más en el denominador en lugar del signo menos. La nueva expresión representa un pulso con la misma forma que en la figura 16.6, pero que se mueve hacia la izquierda a medida que avanza el tiempo. Otra nueva característica en este caso es el numerador 4 en vez de 2. Por lo tanto, la nueva expresión representa un pulso con el doble de alto que en la figura 16.6.

16.2 Análisis de modelo: onda viajera

En esta sección se introduce una función de onda importante cuya forma se muestra en la figura 16.7. La onda representada por esta curva se llama **onda sinusoidal**, porque la curva es la misma que en la función $\sin \theta$ contra θ . Una onda sinusoidal se podría generar en la cuerda de la figura 16.1 al agitar el extremo de la cuerda arriba y abajo en movimiento armónico simple.

La onda sinusoidal es el ejemplo más simple de una onda periódica continua y se puede usar para construir ondas más complejas (véase la sección 18.8). La curva café en la figura 16.7 representa una instantánea de una onda sinusoidal viajera en $t = 0$, y la curva azul representa una instantánea de la onda en algún tiempo posterior t . Imagine dos tipos de movimiento que pueden ocurrir. Primero, la forma de onda completa se mueve hacia la derecha y eventualmente llega a la posición de la curva azul. Éste es el movimiento de la *onda*. Si se concentra en un elemento del medio, como el elemento en $x = 0$, observará que cada elemento se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje y en movimiento armónico simple. Éste es el movimiento de los *elementos del medio*. Es importante diferenciar entre el movimiento de la onda y el movimiento de los elementos del medio.

En capítulos anteriores de este libro se elaboraron varios modelos de análisis basados en tres modelos de simplificación: la partícula, el sistema y el objeto rígido. Con la introducción a las ondas se puede diseñar un nuevo modelo de simplificación, el **modelo de onda**, que permitirá explorar más modelos de análisis para resolver problemas. Una partícula ideal tiene tamaño cero. Se pueden construir objetos físicos con tamaño distinto de cero como combinaciones de partículas. Por lo tanto, la partícula se considera como un bloque de construcción básico. Una onda ideal tiene una sola frecuencia y es infinitamente larga; es decir, la onda existe en todo el Universo. (Una onda de longitud finita necesariamente debe tener una mezcla de frecuencias.) Cuando este concepto se explore en la sección 18.8 se encontrará que las ondas ideales son combinables para construir ondas complejas, tal como se combinan partículas.

En seguida se desarrollarán las características principales y representaciones matemáticas del análisis de modelo de una **onda viajera**. Este modelo se emplea cuando una onda se mueve a través del espacio sin interactuar con otras ondas o partículas.

La figura 16.8a muestra una instantánea de una onda móvil a través de un medio. La figura 16.8b muestra una gráfica de la posición de un elemento del medio como función del tiempo. Un punto en la figura 16.8a, donde el desplazamiento del elemento de su posición normal es lo más alto, se llama **cresta** de la onda. El punto más bajo se llama **valle**. La distancia de una cresta a la siguiente se llama **longitud de onda** λ (letra griega lambda). De manera más general, la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos idénticos cualesquiera en ondas adyacentes, como se muestra en la figura 16.8a.

Si usted cuenta el número de segundos entre las llegadas de dos crestas adyacentes en un punto dado en el espacio, debe medir el **periodo** T de las ondas. En general, el periodo es el intervalo de tiempo requerido para que dos puntos idénticos de ondas adyacentes pasen por un punto, como se muestra en la figura 16.8b. El periodo de la onda es el mismo que el periodo de la oscilación armónica simple de un elemento del medio.

Es más frecuente que la misma información se dé mediante el inverso del periodo, que se llama **frecuencia** f . En general, la frecuencia de una onda periódica es el número de crestas (o valles, o cualquier otro punto sobre la onda) que pasa un punto determinado en un intervalo de tiempo unitario. La frecuencia de una onda sinusoidal se relaciona con el periodo mediante la expresión

$$f = \frac{1}{T}$$

(16.3)

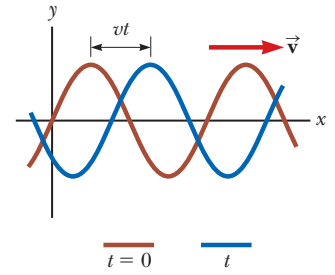


Figura 16.7 Una onda sinusoidal unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v . La curva café representa una instantánea de la onda en $t = 0$, y la curva azul presenta una instantánea en algún tiempo posterior t .

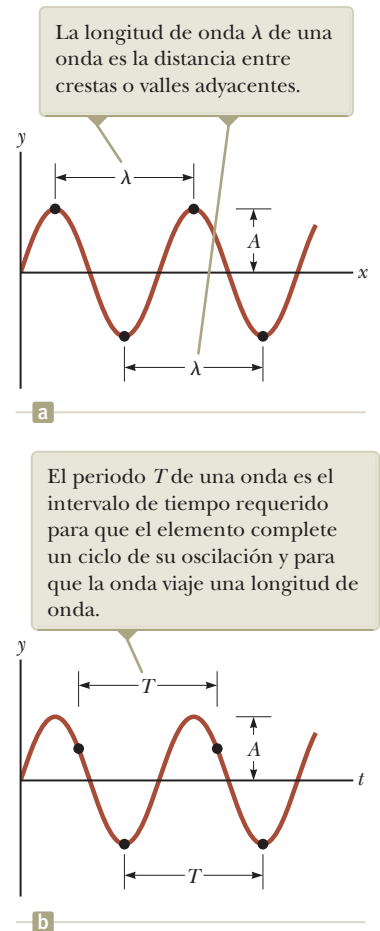


Figura 16.8 (a) Una instantánea de onda sinusoidal. (b) Posición de un elemento del medio como función del tiempo.

Prevención de riesgos ocultos 16.1

¿Cuál es la diferencia entre las figuras 16.8a y 16.8b? Observe la similitud visual entre las figuras 16.8a y 16.8b. Las formas son iguales, pero (a) es una gráfica de posición vertical comparada con posición horizontal, mientras que (b) es posición vertical en función del tiempo. La figura 16.8a es una representación pictórica de la onda *para una serie de elementos del medio*; es lo que vería en un instante de tiempo. La figura 16.8b es una representación gráfica de la posición de *un elemento del medio* como función del tiempo. Que ambas figuras tengan forma idéntica representa la ecuación 16.1: una onda es la *misma* función tanto de x como de t .

La frecuencia de la onda es la misma que la frecuencia de la oscilación armónica simple de un elemento del medio. La unidad de frecuencia más común, como se aprendió en el capítulo 15, es s^{-1} , o **hertz** (Hz). La correspondiente unidad para T es segundos.

La máxima posición de un elemento del medio relativo a su posición de equilibrio se llama **amplitud** A de la onda, como se ve en la figura 16.8.

Las ondas viajan con una rapidez específica, y esta rapidez depende de las propiedades del medio perturbado. Por ejemplo, las ondas sonoras viajan a través del aire a temperatura ambiente con una rapidez aproximada de 343 m/s (781 mi/h), mientras que en la mayoría de los sólidos viajan con una rapidez mayor a 343 m/s.

Considere la onda sinusoidal de la figura 16.8a, que muestra la posición de la onda en $t = 0$. Ya que la onda es sinusoidal, se espera que la función de onda en este instante se exprese como $y(x, 0) = A \sin ax$, donde A es la amplitud y a es una constante a determinar. En $x = 0$ se ve que $y(0, 0) = A \sin a(0) = 0$, consistente con la figura 16.8a. El siguiente valor de x para el que y es cero es $x = \lambda/2$. Por lo tanto,

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A \sin\left(a \frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Para que esta ecuación sea cierta debe tener $a\lambda/2 = \pi$ o $a = 2\pi/\lambda$. En consecuencia, la función que describe las posiciones de los elementos del medio a través del que viaja la onda sinusoidal se puede escribir

$$y(x, 0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (16.4)$$

donde la constante A representa la amplitud de la onda y la constante λ es la longitud de onda. Observe que la posición vertical de un elemento del medio es la misma siempre que x aumente por un múltiplo entero de λ . De acuerdo con el análisis de la ecuación 16.1, si la onda se mueve hacia la derecha con una rapidez v , la función de onda en algún tiempo posterior t es

$$y(x, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \quad (16.5)$$

Si la onda viajara hacia la izquierda, la cantidad $x - vt$ se sustituiría por $x + vt$, como aprendió cuando se desarrollaron las ecuaciones 16.1 y 16.2.

Por definición, la onda viaja a través de un desplazamiento Δx igual a una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo Δt de un periodo T . Por lo tanto, la rapidez de onda, la longitud de onda y el periodo se relacionan mediante la expresión

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} \quad (16.6)$$

Al sustituir esta expresión para v en la ecuación 16.5 se obtiene

$$y = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \quad (16.7)$$

Esta forma de la función de onda muestra la naturaleza *periódica* de y . Advierta que con frecuencia se utilizará y en lugar de $y(x, t)$ como una notación abreviada. En cualquier tiempo dado t , y tiene el *mismo* valor en las posiciones x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ y así sucesivamente. Además, en cualquier posición dada x , el valor de y es el mismo en los tiempos t , $t + T$, $t + 2T$ y así sucesivamente.

La función de onda se puede expresar en una forma conveniente al definir otras dos cantidades, el **número de onda angular** k (por lo general simplemente llamado **número de onda**) y la **frecuencia angular** ω :

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad (16.8)$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (16.9)$$

Número de onda angular ►

Frecuencia angular ►

Al usar estas definiciones, la ecuación 16.7 se puede escribir en la forma más compacta

$$y = A \sin(kx - \omega t) \quad (16.10)$$

◀ Función de onda para una onda sinusoidal

Al utilizar las ecuaciones 16.3, 16.8 y 16.9, la rapidez de onda v , originalmente dada en la ecuación 16.6, se expresa en las formas alternativas siguientes:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (16.11)$$

$$v = \lambda f \quad (16.12)$$

◀ Rapidez de una onda sinusoidal

La función de onda dada en la ecuación 16.10 supone que la posición vertical y de un elemento del medio es cero en $x = 0$ y $t = 0$. Éste no necesita ser el caso. Si no lo es, la función de onda por lo general se expresa en la forma

$$y = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (16.13)$$

◀ Expresión general para una onda sinusoidal

donde ϕ es la **constante de fase**, tal como aprendió en el estudio del movimiento periódico en el capítulo 15. Esta constante se determina a partir de las condiciones iniciales. Las ecuaciones principales en la representación matemática del análisis de modelo de onda viajera son las ecuaciones 16.3, 16.10 y 16.12.

E **xamen rápido 16.2** Una onda sinusoidal de frecuencia f viaja a lo largo de una cuerda estirada. La cuerda se lleva al reposo y una segunda onda viajera con frecuencia $2f$ se establece en la cuerda. (i) ¿Cuál es la rapidez de onda de la segunda onda? (a) El doble de la primera onda, (b) la mitad de la primera onda, (c) la misma que la primera onda, (d) imposible de determinar. (ii) A partir de las mismas opciones, describa la longitud de onda de la segunda onda. (iii) A partir de las mismas opciones, describa la amplitud de la segunda onda.

Ejemplo 16.2

Una onda sinusoidal viajera

AM

Una onda sinusoidal viajera en la dirección x positiva tiene una amplitud de 15.0 cm, longitud de onda de 40.0 cm y frecuencia de 8.00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en $t = 0$ y $x = 0$ también es de 15.0 cm, como se muestra en la figura 16.9

(A) Encuentre el número de onda k , periodo T , frecuencia angular ω y rapidez v de la onda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.9 muestra la onda en $t = 0$. Imagine que esta onda se mueve hacia la derecha y mantiene su forma.

Categorizar De la descripción en el enunciado del problema, se observa que se está estudiando una onda mecánica que se mueve a través de un medio, así, este problema se clasifica con el modelo de *onda viajera*.

Analizar

De la ecuación 16.8, evalúe el número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40.0 \text{ cm}} = 15.7 \text{ rad/m}$$

De la ecuación 16.3, obtenga el periodo de la onda:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00 \text{ s}^{-1}} = 0.125 \text{ s}$$

Con la ecuación 16.9, determine la frecuencia angular de la onda:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00 \text{ s}^{-1}) = 50.3 \text{ rad/s}$$

Mediante la ecuación 16.12, evalúe la rapidez de onda:

$$v = \lambda f = (40.0 \text{ cm})(8.00 \text{ s}^{-1}) = 3.20 \text{ m/s}$$

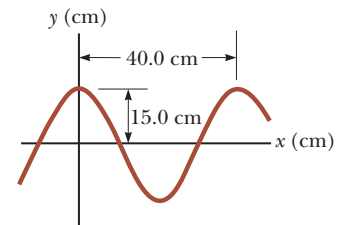


Figura 16.9 (Ejemplo 16.2) Una onda sinusoidal con longitud de onda $\lambda = 40.0 \text{ cm}$ y amplitud $A = 15.0 \text{ cm}$.

16.2 continuación

(B) Determine la constante de fase ϕ y escriba una expresión general para la función de onda.

SOLUCIÓN

Sustituya $A = 15.0$ cm, $y = 15.0$ cm, $x = 0$ y $t = 0$ en la ecuación 16.13:

Escriba la función de onda:

Sustituya los valores para A , k y ω en unidades SI en esta expresión:

$$15.0 = (15.0) \sin \phi \rightarrow \sin \phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$y = A \sin \left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos (kx - \omega t)$$

$$y = 0.150 \cos (15.7x - 50.3t)$$

Finalizar Revise los resultados cuidadosamente para asegurarse que los entiende. ¿Cómo cambiaría la gráfica de la figura 16.9 si el ángulo de fase fuera cero? ¿Cómo cambiaría la gráfica si la amplitud fuera de 30.0 cm? ¿Cómo cambiaría la gráfica si la longitud de onda fuera de 10.0 cm?

Ondas sinusoidales en cuerdas

En la figura 16.1 se demostró cómo crear un pulso al sacudir una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo una vez. Para crear una serie de tales pulsos, una onda, sustituya la mano con una varilla oscilatoria que vibre en movimiento armónico simple. La figura 16.10 representa instantáneas de la onda creada de esta forma a intervalos de $T/4$. Ya que el extremo de la varilla oscila en movimiento armónico simple, cada elemento de la cuerda, como el que está en P , también oscila verticalmente con movimiento armónico simple. Por lo tanto, todo elemento de la cuerda se puede tratar como un oscilador armónico simple que vibra con una frecuencia igual a la frecuencia de oscilación de la varilla.² Adverta que, aun cuando cada elemento oscila en la dirección y , la onda viaja en la dirección x con una rapidez v . De hecho, ésta es la definición de una onda transversal.

Si se define $t = 0$ como el instante en que la configuración de la cuerda es como la mostrada en la figura 16.10a, la función de onda se puede escribir como

$$y = A \sin (kx - \omega t)$$

Se puede usar esta expresión para describir el movimiento de cualquier elemento de la cuerda. Un elemento en el punto P (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, y así su coordenada x permanece constante. Por lo tanto, la **rapidez transversal** v_y (no confundir con la rapidez de onda v) y la **aceleración transversal** a_y de los elementos de la cuerda son

$$v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=\text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos (kx - \omega t) \quad (16.14)$$

$$a_y = \left. \frac{dv_y}{dt} \right|_{x=\text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin (kx - \omega t) \quad (16.15)$$

Estas expresiones incorporan derivadas parciales porque y depende tanto de x como de t . En la operación $\partial y / \partial t$, por ejemplo, se toma una derivada respecto a t mientras se mantiene x constante. Los valores máximos de la rapidez transversal y la aceleración transversal son simplemente los valores absolutos de los coeficientes de las funciones coseno y seno:

$$v_{y,\text{máx}} = \omega A \quad (16.16)$$

$$a_{y,\text{máx}} = \omega^2 A \quad (16.17)$$

La rapidez transversal y la aceleración transversal de los elementos de la cuerda no llegan simultáneamente a sus valores máximos. La rapidez transversal logra su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transver-

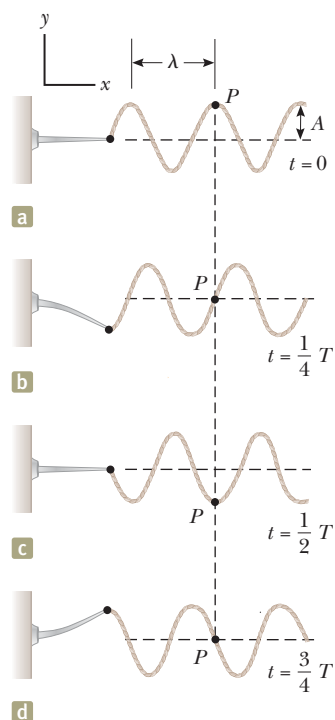


Figura 16.10 Un método para producir una onda sinusoidal sobre una cuerda. El extremo izquierdo de la cuerda se conecta a una varilla que se pone a oscilar. Cada elemento de la cuerda, como el que está en el punto P , oscila con movimiento armónico simple en la dirección vertical.

² En este arreglo, se supone que un elemento de cuerda siempre oscila en una línea vertical. La tensión en la cuerda variaría si a un elemento se le permitiera moverse hacia los lados. Tal movimiento haría el análisis muy complejo.

sal llega a su valor máximo ($\omega^2 A$) cuando $y = \pm A$. Por último, las ecuaciones 16.16 y 16.17 son idénticas en forma matemática a las correspondientes ecuaciones para movimiento armónico simple, ecuaciones 15.17 y 15.18.

Examen rápido 16.3 La amplitud de una onda se duplica sin que se hagan otros cambios a la onda. Como resultado de esta duplicación, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto? (a) La rapidez de la onda cambia. (b) La frecuencia de la onda cambia. (c) La máxima rapidez transversal de un elemento del medio cambia. (d) Los enunciados del inciso (a) al (c) son todos verdaderos. (e) Ninguno de los enunciados del inciso (a) al (c) es verdadero.

Prevención de riesgos ocultos 16.2

Dos tipos de rapidez/velocidad No confunda v , la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y , la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

Análisis de modelo

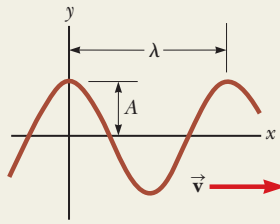
Onda viajera

Imagine una fuente en vibración que logra influenciar el medio con el que hace contacto. Tal fuente crea una perturbación que se propaga a través del medio. Si la fuente vibra en movimiento armónico simple con periodo T , ondas sinusoidales se propagan por el medio con una rapidez dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (16.6, 16.12)$$

donde λ es la **longitud de onda** de la onda y f es su **frecuencia**. Una onda sinusoidal puede expresarse como

$$y = A \sin(kx - \omega t) \quad (16.10)$$



donde A es la **amplitud** de la onda, k es su **número de onda** y ω es su **frecuencia angular**.

Ejemplos:

- una varilla vibratoria unida a una cuerda genera en ésta una onda sinusoidal
- un altavoz vibra y emite ondas sonoras en el aire (capítulo 17)
- una guitarra vibra y emite ondas sonoras en el aire (capítulo 18)
- una carga eléctrica en vibración crea una onda electromagnética que se propaga en el espacio con la rapidez de la luz (capítulo 34)

16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas

Un aspecto del comportamiento de las ondas mecánicas *lineales* es que la rapidez de onda sólo depende de las propiedades del medio en el que viaja la onda. Las ondas con amplitud A pequeña respecto de la longitud de onda λ se pueden representar como ondas lineales (vea la sección 16.6). En esta sección se determina la rapidez de una onda transversal que viaja en una cuerda tensa.

Se utilizará un análisis mecánico para deducir la expresión para la rapidez de un pulso que se desplaza en una cuerda sujeta a una tensión T . Considere un pulso que se mueve hacia la derecha con una rapidez uniforme v , medida respecto a un marco inercial estacionario (respecto a la Tierra), como se muestra en la figura 16.11a. Las leyes de Newton son válidas en cualquier marco de referencia inercial. Por lo tanto, este pulso se observará desde un diferente marco de referencia inercial, uno que se mueve junto con el pulso y con la misma rapidez que éste, de modo que el pulso está en reposo en este nuevo marco, como en la figura 16.11b. En este marco de referencia el pulso permanece fijo y cada elemento de la cuerda se mueve hacia la izquierda a través de la forma del pulso.

Un pequeño elemento de la cuerda, de longitud Δs , forma un arco aproximado de un círculo de radio R , como se muestra en la vista ampliada de la figura 16.11b. En el marco de referencia móvil, el elemento de la cuerda se mueve hacia la izquierda con rapidez v . Conforme viaja a través del arco, el elemento se puede modelar como una partícula en movimiento circular uniforme. Este elemento tiene una aceleración centrípeta igual a v^2/R , que es proporcionada por las componentes de la fuerza $\vec{T}$, cuya magnitud es la tensión en la cuerda. La fuerza $\vec{T}$ actúa a cada lado del elemento, tangente al arco, como en la figura 16.11b. Las componentes horizontales de $\vec{T}$ se cancelan entre sí, y cada componente vertical $T \sin \theta$ actúa hacia abajo. Así, la magnitud de la fuerza radial total sobre el elemento es $2T \sin \theta$. Ya que el elemento es pequeño, θ es pequeño y puede usarse la aproximación de ángulo pequeño $\sin \theta \approx \theta$. Por lo tanto, la magnitud de la fuerza radial total es

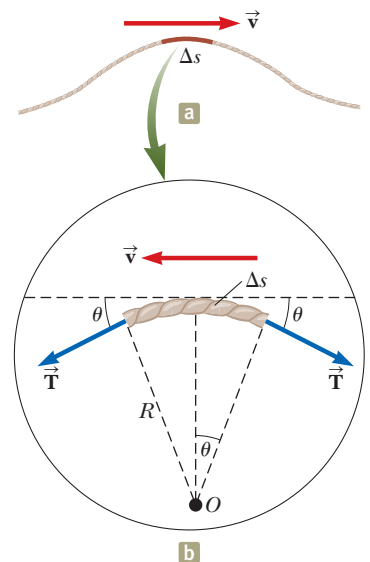


Figura 16.11 (a) En el marco de referencia de la Tierra, un pulso se mueve, con rapidez v , hacia la derecha sobre una cuerda. (b) En un marco de referencia moviéndose hacia la derecha junto con el pulso, el pequeño elemento de longitud Δs se mueve hacia la izquierda con rapidez v .

$$F_r = 2T \sin \theta \approx 2T\theta$$

El elemento tiene una masa $m = \mu \Delta s$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. Como el elemento forma parte de un círculo y subtiende un ángulo de 2θ en el centro, $\Delta s = R(2\theta)$, y

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta$$

El elemento de la cuerda se modela como una partícula bajo una fuerza neta. Por lo tanto, la aplicación de la segunda ley de Newton a este elemento en la dirección radial da

$$F_r = \frac{mv^2}{R} \rightarrow 2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \rightarrow T = \mu v^2$$

Al resolver para v se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (16.18)$$

Rapidez de una onda sobre
una cuerda estirada ►

Observe que esta deducción se apoya en la suposición de que la altura del pulso es pequeña respecto a la longitud del pulso. Esta suposición permitió emplear la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. Además, el modelo supone que la tensión T no es afectada por la presencia del pulso, así T es la misma en todos los puntos sobre el pulso. Finalmente, esta demostración no supone alguna forma particular para el pulso. Por lo tanto, se concluye que un pulso de *cualquier forma* viaja a lo largo de la cuerda con rapidez $v = \sqrt{T/\mu}$, sin que se altere la forma del pulso.

Prevención de riesgos ocultos 16.3

Múltiples Ts No confunda la T en la ecuación 16.18 para la tensión con el símbolo T empleado en el capítulo para el periodo de una onda. El contexto de la ecuación debe ayudarle a identificar a cuál cantidad se hace referencia. ¡Simplemente no hay suficientes letras en el alfabeto para asignar una letra única a cada variable!

- Ejercicio rápido 16.4** Suponga que con la mano crea un pulso al mover una vez el extremo libre de una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo, comience en $t = 0$. La cuerda se une en su otro extremo a una pared distante. El punto alcanza la pared en el tiempo t . ¿Cuál de las siguientes acciones, tomada por sí misma, disminuye el intervalo de tiempo requerido para que el pulso llegue a la pared? Puede ser correcta más de una opción. (a) Mover la mano más rápidamente, pero sólo hacia arriba o hacia abajo una vez en la misma cantidad, (b) mover la mano más lentamente, pero sólo hacia arriba y hacia abajo por la misma cantidad, (c) mover la mano una mayor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, (d) mover la mano una menor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, (e) usar una cuerda más pesada de la misma longitud y bajo la misma tensión, (f) usar una cuerda más ligera de la misma longitud y bajo la misma tensión, (g) usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión decreciente, (h) usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión creciente.

Ejemplo 16.3 La rapidez de un pulso en una cuerda

AM

Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.300 kg y una longitud de 6.00 m (figura 16.12). La cuerda pasa sobre una polea y soporta un objeto de 2.00 kg. Encuentre la rapidez de un pulso que viaje a lo largo de esta cuerda.

SOLUCIÓN

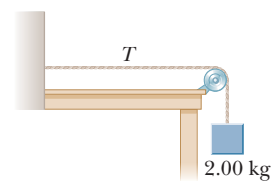
Conceptualizar En la figura 16.12 el bloque colgante establece una tensión en la cuerda horizontal. Esta tensión determina la rapidez con que se mueve la onda sobre la cuerda.

Categorizar Para encontrar la tensión en la cuerda modele el bloque colgante como una *partícula en equilibrio*. Después use la tensión para evaluar la rapidez de la onda sobre la cuerda, aplicando la ecuación 16.18.

Analizar Aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio:

Resuelva para la tensión en la cuerda:

Figura 16.12 (Ejemplo 16.3) La tensión T en la cuerda se mantiene mediante el objeto suspendido. La rapidez de cualquier onda que viaje a lo largo de la cuerda está dada por $v = \sqrt{T/\mu}$.



$$\sum F_y = T - m_{\text{bloque}}g = 0$$

$$T = m_{\text{bloque}}g$$

16.3 continuación

Aplique la ecuación 16.18 para encontrar la rapidez de la onda, utilice $\mu = m_{\text{cuerda}}/\ell$ para la densidad de masa lineal de la cuerda:

Evalúe la rapidez de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_{\text{bloque}} g \ell}{m_{\text{cuerda}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{(2.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(6.00 \text{ m})}{0.300 \text{ kg}}} = 19.8 \text{ m/s}$$

Finalizar El cálculo de la tensión desprecia la pequeña masa de la cuerda. En sentido estricto, la cuerda nunca puede ser exactamente recta; por lo tanto, la tensión no es uniforme.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el bloque se balancea de atrás para adelante respecto de la vertical como un péndulo? ¿Cómo afectaría a la rapidez de onda en la cuerda?

Respuesta El bloque en balanceo se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta*. La magnitud de una de las fuerzas sobre el bloque es la tensión en la cuerda, la cual determina la rapidez de la onda. A medida que el bloque se balancea, la tensión cambia, así que cambia la rapidez de la onda.

Cuando el bloque está en la parte baja del balanceo, la cuerda está vertical y la tensión es mayor que el peso del bloque, porque la fuerza neta debe ser hacia arriba para proporcionar la aceleración centrípeta del bloque. Por lo tanto, la rapidez de la onda debe ser mayor que 19.8 m/s.

Cuando el bloque está en su punto más alto al final de un balanceo está en reposo momentáneo, así que no existe aceleración centrípeta en dicho instante. El bloque es una partícula en equilibrio en la dirección radial. La tensión se equilibra mediante una componente de la fuerza gravitacional sobre el bloque. Entonces, la tensión es más pequeña que el peso y la rapidez de la onda es menor que 19.8 m/s. ¿Con qué frecuencia varía la rapidez de la onda? ¿Es la misma frecuencia que tiene el péndulo?

Ejemplo 16.4

Rescate del excursionista

AM

Un excursionista de 80.0 kg queda atrapado en la saliente de una montaña después de una tormenta. Un helicóptero rescata al excursionista, se mantiene sobre él y le baja un cable. La masa del cable es 8.00 kg y su longitud es de 15.0 m. El cable se amarra a un cabestrillo de 70.0 kg de masa. El excursionista se ata al cabestrillo y después el helicóptero acelera hacia arriba. Aterrorizado por colgar del cable a mitad del aire, el excursionista intenta enviar señales al piloto lanzando pulsos transversales por el cable. Un pulso tarda 0.250 s en recorrer la longitud del cable. ¿Cuál es la aceleración del helicóptero? Suponga que en el cable la tensión es uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el efecto de la aceleración del helicóptero sobre el cable. Mientras mayor sea la aceleración hacia arriba, mayor será la tensión en el cable. A su vez, a mayor tensión, mayor la rapidez de los pulsos en el cable.

Categorizar Este problema es una combinación de uno involucrando la rapidez de los pulsos en una cuerda y de otro en donde el excursionista y el cabestrillo son modelados como una *partícula bajo una fuerza neta*.

Analizar Use el intervalo de tiempo en que el pulso viaja del excursionista al helicóptero para encontrar la rapidez de los pulsos en el cable:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{15.0 \text{ m}}{0.250 \text{ s}} = 60.0 \text{ m/s}$$

Resuelva la ecuación 16.18 para la tensión en el cable:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow T = \mu v^2$$

Modele al excursionista y el cabestrillo como una partícula bajo una fuerza neta, y note que la aceleración de esta partícula de masa m es la misma que la aceleración del helicóptero:

$$\sum F = ma \rightarrow T - mg = ma$$

Resuelva para la aceleración y sustituya la tensión de la ecuación (1):

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{\mu v^2}{m} - g = \frac{m_{\text{cable}} v^2}{\ell_{\text{cable}} m} - g$$

Sustituya valores numéricos:

$$a = \frac{(8.00 \text{ kg})(60.0 \text{ m/s})^2}{(15.0 \text{ m})(150.0 \text{ kg})} - 9.80 \text{ m/s}^2 = 3.00 \text{ m/s}^2$$

continúa

16.4 continuación

Finalizar Un cable real tiene rigidez además de tensión. La rigidez tiende a regresar un alambre a su forma recta original incluso cuando no esté bajo tensión. Por ejemplo, una cuerda de piano se endereza si se le libera de una forma curva, las cuerdas de embalaje no.

La rigidez representa una fuerza restauradora además de la tensión y aumenta la rapidez de la onda. En consecuencia, para un cable real la rapidez de 60.0 m/s que se determinó muy probablemente se asocia con una aceleración menor del helicóptero.

16.4 Reflexión y transmisión

El modelo de onda viajera describe ondas que viajan a través de un medio uniforme sin interactuar con algo más en el camino. Ahora se considerará cómo una onda viajera es afectada cuando encuentra un cambio en el medio. Por ejemplo, considere un pulso que viaja en una cuerda que está rígidamente unida a un soporte en un extremo, como en la figura 16.13. Cuando el pulso llega al soporte ocurre un severo cambio en el medio: la cuerda termina. Como resultado, el pulso experimenta **reflexión**; es decir, el pulso se mueve de regreso a lo largo de la cuerda en la dirección opuesta.

Note que el pulso reflejado está *invertido*. Esta inversión se explica como sigue. Cuando el pulso alcanza el extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Por la tercera ley de Newton, el soporte debe ejercer sobre la cuerda una fuerza de reacción de igual magnitud y con dirección opuesta (hacia abajo). Esta fuerza hacia abajo hace que el pulso se invierta en la reflexión.

Ahora considere otro caso. Esta vez el pulso llega al final de una cuerda que es libre de moverse verticalmente, como en la figura 16.14. La tensión en el extremo libre se mantiene porque la cuerda está amarrada a un anillo de masa despreciable que tiene libertad para deslizarse verticalmente sobre un poste uniforme sin fricción. De nuevo el pulso se refleja, pero esta vez no se invierte. Cuando llega al poste el pulso ejerce una fuerza sobre el extremo libre de la cuerda y esto hace que el anillo acelere hacia arriba. El anillo se eleva tan alto como el pulso entrante, y luego la componente hacia abajo de la fuerza de tensión jala el anillo de vuelta hacia abajo. Este movimiento del anillo produce un pulso reflejado que no se invierte y que tiene la misma amplitud que el pulso entrante.

Por último, considere una situación en que la frontera es intermedia entre estos dos extremos. En este caso, parte de la energía en el pulso incidente se refleja y parte experimenta **transmisión**; es decir, algo de la energía pasa a través de la frontera. Por ejemplo, suponga que una cuerda ligera se une a una cuerda más pesada, como en la figura 16.15. Cuando un pulso que viaja sobre la cuerda ligera llega a la frontera entre las dos cuerdas, parte del pulso se refleja e invierte y parte se transmite a la cuerda más pesada. El pulso reflejado se invierte por las mismas razones descritas en el caso de la cuerda unida rígidamente a un soporte.

El pulso reflejado tiene una amplitud menor que el pulso incidente. En la sección 16.5 se demostró que la energía que porta una onda se relaciona con su amplitud. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, cuando el pulso se descompone en un pulso reflejado y un pulso transmitido en la frontera, la suma de las energías de estos dos pulsos debe ser igual a la energía del pulso incidente. Ya que el pulso reflejado sólo contiene parte de la energía del pulso incidente, su amplitud debe ser menor.

Cuando un pulso que viaja sobre una cuerda pesada golpea la frontera entre la cuerda pesada y una ligera, como en la figura 16.16; de nuevo, parte se refleja y parte se transmite. En este caso el pulso reflejado no se invierte.

En cualquier caso las alturas relativas de los pulsos reflejado y transmitido dependen de las densidades relativas de las dos cuerdas. Si las cuerdas son idénticas, no existe discontinuidad en la frontera y no se presenta reflexión.

De acuerdo con la ecuación 16.18, la rapidez de una onda sobre una cuerda aumenta a medida que disminuye la masa por unidad de longitud de la cuerda. En

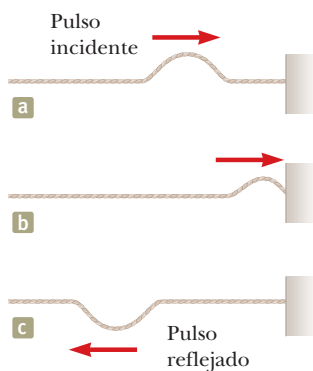


Figura 16.13 Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada. El pulso reflejado está invertido, pero su forma no cambia de otra manera.

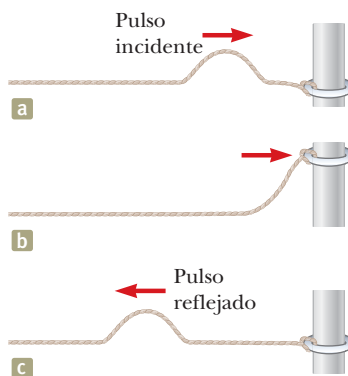


Figura 16.14 Reflexión de un pulso viajero en el extremo libre de una cuerda estirada. El pulso reflejado no está invertido.

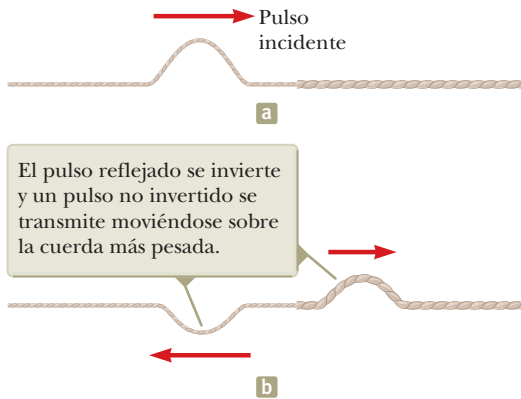


Figura 16.15 (a) Un pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda ligera se aproxima a la frontera con una cuerda más pesada. (b) La situación después que el pulso llega a la frontera.

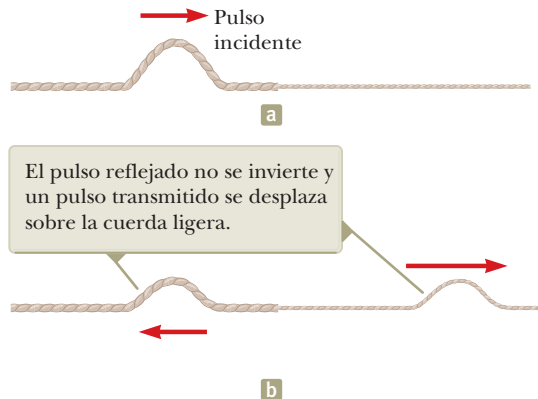


Figura 16.16 (a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda pesada se aproxima a la frontera con una cuerda ligera. (b) La situación después que el pulso llega a la frontera.

otras palabras, una onda viaja más rápidamente sobre una cuerda ligera que sobre una pesada si ambas están bajo la misma tensión. Las siguientes reglas generales se aplican a las ondas reflejadas: cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A > v_B$ (es decir, cuando B es más denso que A), se invierte en la reflexión. Cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A < v_B$ (es decir, cuando A es más denso que B), no se invierte en la reflexión.

16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

Las ondas transportan energía a través de un medio mientras se propagan. Por ejemplo, suponga que un objeto cuelga de una cuerda estirada y se envía un pulso por la cuerda, como en la figura 16.17a. Cuando el pulso llega al objeto suspendido, éste se desplaza momentáneamente hacia arriba, como en la figura 16.17b. En el proceso se transfirió energía al objeto que aparece como un aumento en la energía potencial gravitacional del sistema objeto-Tierra. Esta sección examina la rapidez a la que se transporta la energía a lo largo de una cuerda. Se supondrá una onda sinusoidal unidimensional en el cálculo de la energía transferida.

Considere una onda sinusoidal que viaja sobre una cuerda (figura 16.18). La fuente de la energía es algún agente externo en el extremo izquierdo de la cuerda. Se puede considerar que la cuerda es un sistema no aislado. A medida que el agente externo realiza trabajo sobre el extremo de la cuerda, moviéndola hacia arriba y hacia abajo, entra energía al sistema de la cuerda y se propaga a lo largo de su longitud. Concentre su atención en un elemento infinitesimal de la cuerda de longitud dx y masa dm . Cada uno de tales elementos oscila verticalmente con su posición descrita por la ecuación 15.6. Por lo tanto, cada elemento de la cuerda se puede modelar como una partícula en movimiento armónico simple, con la oscilación en la dirección y . Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A . La energía cinética K asociada con una partícula móvil es $K = mv^2/2$. Si esta ecuación se aplica al elemento infinitesimal, la energía cinética dK asociada con el movimiento de subir y bajar de este elemento es

$$dK = \frac{1}{2}(dm)v_y^2$$

donde v_y es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa dm del elemento de longitud dx es igual a μdx . Por tanto, la energía cinética de un elemento de la cuerda se expresa como

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2 \quad (16.19)$$

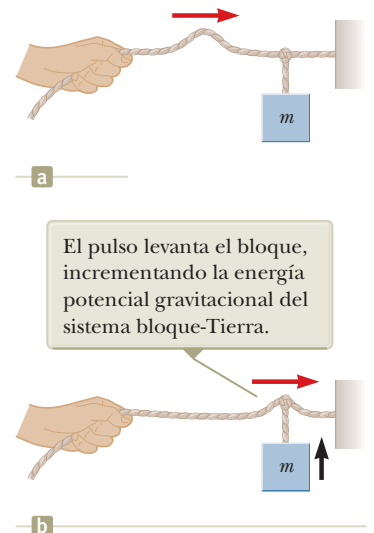


Figura 16.17 (a) Un pulso viaja hacia la derecha sobre una cuerda estirada, llevando energía con él. (b) La energía del pulso llega al bloque colgante.

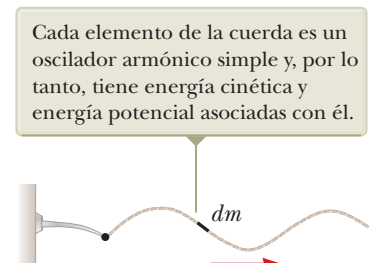


Figura 16.18 Una onda sinusoidal que viaja a lo largo del eje x sobre una cuerda estirada.

Al sustituir, con la ecuación 16.14, para la rapidez transversal general de un elemento del medio se obtiene

$$dK = \frac{1}{2}\mu[-\omega A \cos(kx - \omega t)]^2 dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) dx$$

Si se toma una instantánea de la onda al tiempo $t = 0$, la energía cinética de un elemento dado es

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx dx$$

Al integrar esta ecuación sobre todos los elementos de cuerda en una longitud de onda de la onda resulta la energía cinética total K_λ en una longitud de onda:

$$\begin{aligned} K_\lambda &= \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2 kx dx \\ &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}\lambda \right] = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda \end{aligned}$$

Además de la energía cinética hay energía potencial asociada con cada elemento de la cuerda debido a su desplazamiento de la posición de equilibrio y las fuerzas restauradoras de elementos vecinos. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total U_λ en una longitud de onda da exactamente el mismo resultado:

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \quad (16.20)$$

A medida que la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado en la cuerda durante un intervalo de tiempo de un periodo de la oscilación. Por lo tanto, la potencia P , o rapidez de transferencia de energía T_{OM} asociada con la onda mecánica, es

$$P = \frac{T_{OM}}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{T} \right)$$

Potencia de una onda ►

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \quad (16.21)$$

La ecuación 16.21 muestra que la rapidez de transferencia de energía por una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a (a) el cuadrado de la frecuencia, (b) el cuadrado de la amplitud y (c) la rapidez de la onda. En efecto, la rapidez de transferencia de energía en *cualquier* onda sinusoidal es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y al cuadrado de la amplitud.

E **xamen rápido 16.5** ¿Cuál de los siguientes, tomado por sí mismo, sería más efectivo para aumentar la rapidez a la que se transfiere la energía mediante una onda que viaja a lo largo de una cuerda? (a) Reducir a la mitad la densidad de masa lineal de la cuerda, (b) duplicar la longitud de onda de la onda, (c) duplicar la tensión en la cuerda, (d) duplicar la amplitud de la onda.

Ejemplo 16.5

Potencia suministrada a una cuerda en vibración

Una onda tensa para la que $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m está bajo una tensión de 80.0 N. ¿Cuánta potencia se debe suministrar a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere una vez más la figura 16.10 y observe que la varilla vibratoria suministra energía a la cuerda con cierta rapidez. Entonces esta energía se propaga hacia la derecha a lo largo de la cuerda.

16.5 continuación

Categorizar Se evalúan cantidades de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Use la ecuación 16.21 para evaluar la potencia: $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$

Aplique las ecuaciones 16.9 y 16.18 para sustituir ω y v : $P = \frac{1}{2}\mu(2\pi f)^2 A^2 \left(\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right) = 2\pi^2 f^2 A^2 \sqrt{\mu T}$

Sustituya valores numéricos: $P = 2\pi^2 (60.0 \text{ Hz})^2 (0.060 \text{ m})^2 \sqrt{(0.050 \text{ kg/m})(80.0 \text{ N})} = 512 \text{ W}$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la cuerda debe transferir energía a una tasa de 1 000 W? ¿Cuál debe ser la amplitud requerida si todos los otros parámetros permanecen iguales?

Respuesta Establezca una razón entre las potencias nueva y la anterior que sólo refleje un cambio en la amplitud:

$$\frac{P_{\text{nueva}}}{P_{\text{anterior}}} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{nueva}}^2 v}{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A_{\text{anterior}}^2 v} = \frac{A_{\text{nueva}}^2}{A_{\text{anterior}}^2}$$

Al resolver para la nueva amplitud se obtiene:

$$A_{\text{nueva}} = A_{\text{anterior}} \sqrt{\frac{P_{\text{nueva}}}{P_{\text{anterior}}}} = (6.00 \text{ cm}) \sqrt{\frac{1\,000 \text{ W}}{512 \text{ W}}} = 8.39 \text{ cm}$$

16.6 La ecuación de onda lineal

En la sección 16.1 se introdujo el concepto de función de onda para representar ondas que viajan sobre una cuerda. Todas las funciones de onda $y(x, t)$ representan soluciones de una ecuación llamada *ecuación de onda lineal*. Esta ecuación da una descripción completa del movimiento ondulatorio, y a partir de ella se puede deducir una expresión para la rapidez de onda. Además, la ecuación de onda lineal es básica para muchas formas de movimiento ondulatorio. En esta sección se deduce esta ecuación cuando se aplica a ondas sobre cuerdas.

Suponga que una onda viajera se propaga a lo largo de una cuerda que está bajo una tensión T . Considere un pequeño elemento de cuerda de longitud Δx (figura 16.19). Los extremos del elemento forman pequeños ángulos θ_A y θ_B con el eje x . Las fuerzas actúan sobre la cuerda en sus extremos donde ella se conecta a los elementos vecinos. Por lo tanto, el modelo se modela como una partícula bajo una fuerza neta. La fuerza neta actuando sobre el elemento en la dirección vertical es

$$\sum F_y = T \sin \theta_B - T \sin \theta_A = T(\sin \theta_B - \sin \theta_A)$$

Ya que los ángulos son pequeños, se puede emplear la aproximación $\sin \theta \approx \tan \theta$ para expresar la fuerza neta como

$$\sum F_y \approx T(\tan \theta_B - \tan \theta_A) \quad (16.22)$$

Imagine experimentar un desplazamiento infinitesimal hacia fuera del extremo derecho del elemento de cuerda en la figura 16.19 a lo largo de la línea azul que representa la fuerza $\vec{T}$. Este desplazamiento tiene componentes x y y infinitesimales y puede ser representado por el vector $dx\hat{i} + dy\hat{j}$. La tangente del ángulo respecto al eje x para este desplazamiento es dy/dx . Ya que esta tangente se evalúa en un instante particular de tiempo, se le debe expresar en forma parcial como $\partial y/\partial x$. Al sustituir para las tangentes en la ecuación 16.22 se obtiene

$$\sum F_y \approx T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \quad (16.23)$$

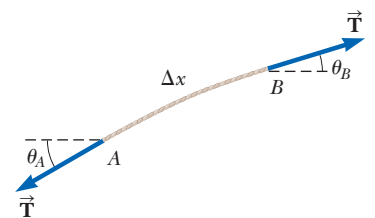


Figura 16.19 Un elemento de cuerda bajo tensión T .

Ahora, del modelo de partícula bajo una fuerza neta se aplica la segunda ley de Newton al elemento con la masa del elemento dada por $m = \mu \Delta x$:

$$\sum F_y = ma_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (16.24)$$

Al combinar la ecuación 16.23 con la ecuación 16.24 resulta

$$\begin{aligned} \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &= T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \\ \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A}{\Delta x} \end{aligned} \quad (16.25)$$

El lado derecho de la ecuación 16.25 se expresa en una forma diferente si nota que la derivada parcial de cualquier función se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Al asociar $f(x + \Delta x)$ con $(\partial y / \partial x)_B$ y $f(x)$ con $(\partial y / \partial x)_A$, se ve que, en el límite $\Delta x \rightarrow 0$, la ecuación 16.25 se convierte en

Ecuación de onda lineal
para una cuerda

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (16.26)$$

Esta expresión es la ecuación de onda lineal cuando se aplica a ondas sobre una cuerda.

La ecuación de onda lineal (ecuación 16.26) con frecuencia se escribe en la forma

Ecuación de onda lineal
general

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (16.27)$$

En general, la ecuación 16.27 se aplica a diferentes tipos de ondas viajeras. Para ondas sobre cuerdas y representa la posición vertical de los elementos de la cuerda. Para ondas sonoras propagándose en un gas, y corresponde a la posición longitudinal de los elementos de gas desde el equilibrio o a variaciones en presión o en densidad del gas. En el caso de ondas electromagnéticas, y corresponde a las componentes de campo eléctrico o magnético.

Se demostró que la función de onda sinusoidal (ecuación 16.10) es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27). Aunque no se probó aquí, la ecuación de onda lineal es satisfecha por *cualquier* función de onda de la forma $y = f(x \pm vt)$. Además, se vio que la ecuación de onda lineal es una consecuencia directa del modelo de partícula bajo una fuerza neta aplicado a cualquier elemento de una cuerda que transporta una onda viajera.

Resumen

Definiciones

Una **onda sinusoidal** unidimensional es aquella para la cual las posiciones de los elementos del medio varían en forma sinusoidal. Una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha se puede expresar con una **función de onda**

$$y(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \quad (16.5)$$

donde A es la **amplitud**, λ es la **longitud de onda** y v es la **rapidez de onda**.

El **número de onda angular** k y la **frecuencia angular** ω de una onda se definen como sigue:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad (16.8)$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (16.9)$$

donde T es el **periodo** de la onda y f es su **frecuencia**.

■ En una **onda transversal** los elementos del medio se mueven en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación.

■ En una **onda longitudinal** los elementos del medio se mueven en una dirección *paralela* a la dirección de propagación.

Conceptos y principios

■ Cualquier onda unidimensional que viaja con una rapidez v en la dirección x se representa mediante una función de onda de la forma

$$y(x, t) = f(x \pm vt) \quad (16.1, 16.2)$$

donde el signo positivo se aplica a una onda que viaja en la dirección x negativa y el signo negativo se aplica a una onda que viaja en la dirección x positiva. La forma de la onda en cualquier instante en el tiempo (una instantánea de la onda) se obtiene al mantener t constante.

■ La rapidez de una onda que viaja sobre una cuerda tensa de masa por unidad de longitud μ y tensión T es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (16.18)$$

■ Una onda se refleja total o parcialmente cuando llega al final del medio en el que se propaga o cuando llega a una frontera donde su rapidez cambia de manera discontinua. Si una onda que viaja sobre una cuerda alcanza un extremo fijo, la onda se refleja e invierte. Si la onda llega a un extremo libre, se refleja pero no se invierte.

■ La **potencia** transmitida por una onda sinusoidal sobre una cuerda estirada es

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (16.21)$$

■ Las funciones de onda son soluciones a una ecuación diferencial llamada **ecuación de onda lineal**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (16.27)$$

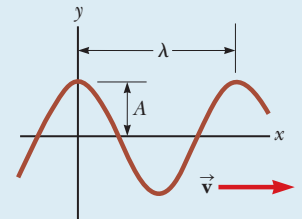
Análisis de modelos para resolver problemas

■ **Onda viajera.** La rapidez de onda de una onda sinusoidal es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (16.6, 16.12)$$

Una onda sinusoidal se expresa como

$$y = A \sin(kx - \omega t) \quad (16.10)$$



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

- Si un extremo de una cuerda pesada se une a un extremo de una cuerda ligera, una onda se mueve de la cuerda pesada a la cuerda más ligera. (i) ¿Qué sucede con la rapidez de la onda? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Es constante. (d) Cambia de manera impredecible. (ii) ¿Qué sucede con la frecuencia? Elija de las mismas posibilidades. (iii) ¿Qué sucede con la longitud de onda? Elija entre las mismas posibilidades.
- Si estira una manguera de hule y le da un tirón, puede observar un pulso que viaja hacia arriba y hacia abajo por la manguera. (i) ¿Qué sucede con la rapidez del pulso si estira la manguera con mayor firmeza? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Es constante. (d) Cambia de manera impredecible. (ii) ¿Qué sucede con la rapidez si llena la manguera con agua? Elija de las mismas posibilidades.
- Clasifique las ondas representadas por las siguientes funciones, de mayor a menor, de acuerdo con (i) sus amplitudes, (ii) sus longitudes de onda, (iii) sus frecuencias, (iv) sus periodos y (v) sus magnitudes de velocidad. Si los valores de una cantidad son iguales para dos ondas, muéstrelas con la misma clasificación. Para todas las funciones, x y y están en metros y t está en segundos. (a) $y = 4 \sin(3x - 15t)$, (b) $y = 6 \cos(3x + 15t - 2)$, (c) $y = 8 \sin(2x + 15t)$, (d) $y = 8 \cos(4x + 20t)$, e) $y = 7 \sin(6x - 24t)$.
- ¿Por cuál factor se debería multiplicar la tensión en una cuerda estirada para duplicar la rapidez de la onda?

Suponga que la cuerda no se estira. (a) Un factor de 8, (b) un factor de 4, (c) un factor de 2, (d) un factor de 0.5, (e) no se puede cambiar la rapidez por un factor predecible mediante un cambio en la tensión.

5. Cuando todas las cuerdas en una guitarra (figura PO16.5) se estiran a la misma tensión, ¿la rapidez de una onda a lo largo de la cuerda grave con más masa será (a) más rápida, (b) más lenta, (c) igual que la rapidez de una onda en las cuerdas más agudas? Alternativamente, (d) ¿la rapidez en la cuerda grave no necesariamente es alguna de estas respuestas?



Figura PO16.5

6. ¿Cuál de los siguientes enunciados no es necesariamente cierto respecto a ondas mecánicas? (a) Son generadas

por alguna fuente de perturbación. (b) Son de naturaleza sinusoidal. (c) Llevan energía. (d) Requieren un medio para su propagación. (e) La rapidez de la onda depende de las propiedades del medio de propagación.

7. (a) ¿Una onda en una cuerda puede moverse con una rapidez de onda que sea mayor que la rapidez transversal máxima $v_{y\text{máx}}$ de un elemento de la cuerda? (b) ¿La rapidez de la onda puede ser mucho mayor que la máxima rapidez del elemento? (c) ¿La rapidez de la onda puede ser igual a la máxima rapidez del elemento? (d) ¿La rapidez de la onda puede ser menor que $v_{y\text{máx}}$?
8. Una fuente vibratoria con frecuencia constante genera una onda sinusoidal en una cuerda bajo tensión constante. Si la potencia entregada a la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambia la amplitud? (a) Un factor de 4, (b) un factor de 2, (c) un factor de $\sqrt{2}$, (d) un factor de 0.707, (e) no se puede predecir.
9. La distancia entre dos crestas sucesivas de una onda sinusoidal que viaja en una cuerda es 2 m. Si la frecuencia de esta onda es 4 Hz, ¿cuál es la rapidez de la onda? (a) 4 m/s, (b) 1 m/s, (c) 8 m/s, (d) 2 m/s, (e) imposible de responder a partir de la información dada.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. A una sustancia sólida le es posible transportar ondas longitudinales y ondas transversales, pero un fluido homogéneo sólo transporta ondas longitudinales. ¿Por qué?
2. (a) ¿Cómo crearía una onda longitudinal en un resorte estirado? (b) ¿Sería posible crear una onda transversal en un resorte?
3. Cuando un pulso viaja en una cuerda tensa, ¿siempre se invierte en la reflexión? Explique.
4. En mecánica, con frecuencia se suponen cuerdas sin masa. ¿Por qué esto no es una buena suposición al analizar ondas sobre cuerdas?
5. Si agita un extremo de una cuerda tensa de manera estable tres veces cada segundo, ¿cuál sería el periodo de la onda sinusoidal generada en la cuerda?
6. (a) Si una cuerda larga cuelga del techo y se envían ondas hacia arriba de la cuerda desde su extremo inferior, ¿por qué la rapidez de las ondas cambia conforme éstas ascienden? (b) ¿La rapidez de las ondas ascendentes se incrementa o disminuye? Explique.
7. ¿Por qué un pulso sobre una cuerda se considera transversal?

8. ¿La rapidez vertical de un segmento de una cuerda tensa horizontal, a través de la que viaja una onda, depende de la rapidez de la onda? Explique.
9. En un terremoto, desde el foco del movimiento se propagan ondas S (transversales) y P (longitudinales). El foco está en el subsuelo radialmente abajo del epicentro sobre la superficie (figura PC16.9). Suponga que las ondas se mueven en línea recta a través de material uniforme. Las ondas S viajan a través de la Tierra más lentamente que las ondas P (aproximadamente a 5 km/s comparado con 8 km/s). Al detectar el tiempo de llegada de las ondas en un sismógrafo, (a) ¿cómo se puede determinar la distancia al foco del terremoto? (b) ¿Cuántas estaciones de detección se necesitan para localizar el foco sin ambigüedades?

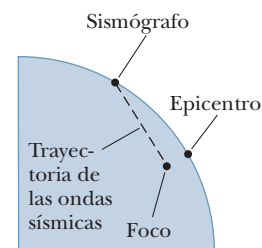


Figura PC16.9

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Sección 16.1 Propagación de una perturbación

- Una estación sismográfica recibe ondas S y P de un terremoto, separadas 17.3 s. Suponga que las ondas viajaron sobre la misma trayectoria con magnitudes de velocidad de 4.50 km/s y 7.80 km/s. Encuentre la distancia desde el sismógrafo al foco del terremoto.
- Las olas en el océano con una distancia de cresta a cresta de 10.0 m se pueden describir mediante la función de onda

$$y(x, t) = 0.800 \sin [0.628(x - vt)]$$

donde x y y están en metros, t está en segundos y $v = 1.20$ m/s. (a) Bosqueje $y(x, t)$ en $t = 0$. (b) Bosqueje $y(x, t)$ en $t = 2.00$ s. (c) Compare las gráficas de los incisos (a) y (b) y explique similitudes y diferencias. (d) ¿Cómo evolucionó la onda entre estas dos gráficas?

- En $t = 0$ se describe un pulso transversal en un alambre mediante la función

$$y = \frac{6.00}{x^2 + 3.00}$$

donde x y y están en metros. Si el pulso viaja en la dirección x positiva con una rapidez de 4.50 m/s, escriba la función $y(x, t)$ que describe este pulso.

- Dos puntos A y B sobre la superficie de la Tierra están a la misma longitud y 60.0° separados en latitud, como se muestra en la figura P16.4. Suponga que un terremoto en el punto A crea una onda P que llega al punto B viajando en línea recta a través del cuerpo de la Tierra con una rapidez constante de 7.80 km/s. El terremoto también genera una onda Rayleigh que viaja a 4.50 km/s. Además de las ondas P y S , las ondas Rayleigh son un tercer tipo de onda sísmica que viaja sobre la *superficie* de la Tierra en lugar de hacerlo a través de su *volumen*. (a) ¿Cuál de estas dos ondas sísmicas llega primero a B ? (b) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre las llegadas de estas dos ondas a B ?

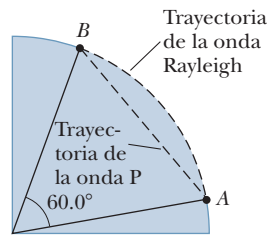


Figura P16.4

Sección 16.2 Análisis de modelo: onda viajera

- Una onda se describe mediante $y = 0.020 \sin(kx - \omega t)$, donde $k = 2.11$ rad/m, $\omega = 3.62$ rad/s, x y y están en metros y t en segundos. Determine (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la rapidez de la onda.
- Cierta cuerda uniforme se mantiene bajo tensión constante. (a) Dibuje una instantánea lateral de una onda sinusoidal en una cuerda, como se muestra en los diagramas del texto. (b) Inmediatamente abajo del diagrama (a) dibuje la misma onda en un momento posterior de un cuarto del periodo de la onda. (c) Luego dibuje una onda con una amplitud 1.5 veces mayor que la onda en el diagrama (a). (d) A continuación dibuje una onda que difiera de la del diagrama (a) sólo por tener una longitud de onda 1.5 veces mayor. (e) Por último, dibuje una onda que difiera del diagrama (a) por tener una frecuencia 1.5 veces mayor.

- Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. El oscilador que genera la onda completa 40.0 vibraciones en 30.0 s. Una cresta dada de la onda viaja 425 cm a lo largo de la cuerda en 10.0 s. ¿Cuál es la longitud de onda de la onda?
- Para cierta onda transversal la distancia entre dos crestas sucesivas es 1.20 m y ocho crestas pasan un punto dado a lo largo de la dirección de viaje cada 12.0 s. Calcule la rapidez de la onda.
- La función de onda para una onda viajera en una cuerda tensa es (en unidades SI)

$$y(x, t) = 0.350 \sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- ¿Cuáles son la rapidez y dirección de viaje de la onda?
 - ¿Cuál es la posición vertical de un elemento de la cuerda en $t = 0$, $x = 0.100$ m? ¿Cuáles son (c) la longitud de onda y (d) la frecuencia de la onda? (e) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de un elemento de la cuerda?
- Cuando un alambre particular vibra con una frecuencia de 4.00 Hz se produce una onda transversal con longitud de onda de 60.0 cm. Determine la rapidez de las ondas a lo largo del alambre.
 - La cuerda que se muestra en la figura P16.11 se impulsa a una frecuencia de 5.00 Hz. La amplitud del movimiento es $A = 12.0$ cm y la rapidez de onda es $v = 20.0$ m/s. Además, la onda es tal que $y = 0$ en $x = 0$ y $t = 0$. Determine (a) la frecuencia angular y (b) el número de onda para esta onda. (c) Escriba una expresión para la función de onda. Calcule (d) la máxima rapidez transversal y (e) la máxima aceleración transversal de un elemento de la cuerda.

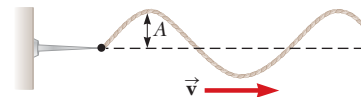


Figura P16.11

- Considere la onda sinusoidal del ejemplo 16.2 con la función de onda

$$y = 0.150 \cos(15.7x - 50.3t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. En cierto instante, el punto A está en el origen y el punto B es el punto más cercano a A sobre el eje x , donde la onda está 60.0° fuera de fase con A . ¿Cuál es la coordenada de B ?

- Una onda sinusoidal con 2.00 m de longitud de onda y 0.100 m de amplitud viaja en una cuerda con una rapidez de 1.00 m/s. En $t = 0$ el extremo izquierdo de la cuerda está en el origen. Para esta onda, encuentre (a) la frecuencia, (b) la frecuencia angular, (c) el número de onda angular y (d) la función de onda en unidades SI. Determine la ecuación de movimiento en unidades SI para (e) el extremo izquierdo de la cuerda y (f) el punto en la cuerda en $x = 1.50$ m a la derecha del extremo izquierdo. (g) ¿Cuál es la máxima rapidez de cualquier elemento de la cuerda?
- (a) Trace la gráfica y contra t en $x = 0$ para una onda sinusoidal de la forma $y = 0.150 \cos(15.7x - 50.3t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. (b) Determine el periodo de vibración. (c) Argumente cómo su resultado se compara con el valor encontrado en el ejemplo 16.2.

15. Una onda transversal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.120 \sin\left(\frac{\pi}{8}x + 4\pi t\right)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Determine (a) la rapidez transversal y (b) la aceleración transversal en $t = 0.200$ s para un elemento de la cuerda localizado en $x = 1.60$ m. ¿Cuáles son (c) la longitud de onda, (d) el periodo y (e) la rapidez de propagación de esta onda?

16. Una onda en una cuerda se describe mediante la función de onda $y = 0.100 \sin(0.50x - 20t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. (a) Demuestre que un elemento de la cuerda en $x = 2.00$ m ejecuta un movimiento armónico. (b) Determine la frecuencia de oscilación de este elemento particular.

17. Una onda sinusoidal se describe mediante la función de onda $y = 0.25 \sin(0.30x - 40t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. Para esta onda determine (a) la amplitud, (b) la frecuencia angular, (c) el número de onda angular, (d) la longitud de onda, (e) la rapidez de onda y (f) la dirección de movimiento.

18. Una onda sinusoidal que viaja en la dirección x negativa (hacia la izquierda) tiene una amplitud de 20.0 cm, una longitud de onda de 35.0 cm y una frecuencia de 12.0 Hz. La posición transversal de un elemento del medio en $t = 0$, $x = 0$ es $y = -3.00$ cm, y el elemento tiene una velocidad positiva en dicha ubicación. Se desea encontrar una expresión para la función de onda que describa esta onda. (a) Bosqueje la onda en $t = 0$. (b) Encuentre el número de onda angular k a partir de la longitud de onda. (c) Encuentre el periodo T a partir de la frecuencia. Encuentre (d) la frecuencia angular ω y (e) la rapidez de onda v . (f) Con la información en $t = 0$ encuentre la constante de fase ϕ . (g) Escriba una expresión para la función de onda $y(x, t)$.

19. (a) Escriba la expresión para y como función de x y t en unidades SI para una onda sinusoidal que viaja a lo largo de una cuerda en la dirección x negativa con las siguientes características: $A = 8.00$ cm, $\lambda = 80.0$ cm, $f = 3.00$ Hz y $y(0, t) = 0$ en $t = 0$. (b) ¿Qué pasaría si? Escriba la expresión para y como función de x y t para la onda en el inciso (a) si supone que $y(x, 0) = 0$ en el punto $x = 10.0$ cm.

20. Una onda sinusoidal transversal sobre una cuerda tiene un periodo $T = 25.0$ ms y viaja en la dirección x negativa con una rapidez de 30.0 m/s. En $t = 0$, un elemento de la cuerda en $x = 0$ tiene una posición transversal de 2.00 cm y viaja hacia abajo con una rapidez de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? (b) ¿Cuál es el ángulo de fase inicial? (c) ¿Cuál es la máxima rapidez transversal de un elemento de la cuerda? (d) Escriba la función de onda para la onda.

Sección 16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas

21. **Problema de repaso.** El límite elástico de un alambre de acero es 2.70×10^8 Pa. ¿Cuál es la máxima rapidez a la que pulsos de onda transversales pueden propagarse a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es 7.86×10^3 kg/m³.)

22. Una cuerda de piano que tiene una masa por unidad de longitud igual a 5.00×10^{-3} kg/m está bajo una tensión de 1 350 N. Encuentre la rapidez con la que una onda viaja sobre esta cuerda.

23. Ondas transversales viajan con una rapidez de 20.0 m/s sobre una cuerda bajo una tensión de 6.00 N. ¿Qué tensión se requiere para una rapidez de onda de 30.0 m/s sobre la misma cuerda?

24. Una estudiante en un examen encuentra en una hoja de referencia las dos ecuaciones

$$f = \frac{1}{T} \quad y \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ella olvidó lo que representa T en cada ecuación. (a) Use análisis dimensional para determinar las unidades requeridas para T en cada ecuación. (b) Explique cómo puede identificar, a partir de las unidades, la cantidad física que representa cada T .

25. Un cable de Ethernet tiene 4.00 m de largo. El cable tiene una masa de 0.200 kg. Un pulso transversal se produce al sacudir un extremo del cable tenso. El cable hace cuatro viajes de atrás para adelante a lo largo del cable en 0.800 s. ¿Cuál es la tensión en el cable?

26. Una onda viajera transversal en un alambre tenso tiene una amplitud de 0.200 mm y una frecuencia de 500 Hz. Viaja con una rapidez de 196 m/s. (a) Escriba una ecuación en unidades SI de la forma $y = A \sin(kx - \omega t)$ para esta onda. (b) La masa por unidad de longitud de este alambre es 4.10 g/m. Encuentre la tensión en el alambre.

27. Un alambre de acero de 30.0 m de longitud y un alambre de cobre de 20.0 m de longitud, ambos con 1.00 mm de diámetro, se conectan extremo con extremo y se estiran a una tensión de 150 N. ¿Durante qué intervalo de tiempo una onda transversal viajará toda la longitud de los dos alambres?

28. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un astronauta en la Luna está estudiando el movimiento ondulatorio mediante el aparato analizado en el ejemplo 16.3 y mostrado en la figura 16.12. Él mide el intervalo de tiempo empleado por los pulsos para viajar a lo largo del alambre horizontal. Suponga que el alambre horizontal tiene una masa de 4.00 g, una longitud de 1.60 m y que un objeto de 3.00 kg está suspendido de su extensión alrededor de la polea. El astronauta encuentra que un pulso requiere 26.1 ms para recorrer la longitud del alambre.

29. En una cuerda la tensión se establece de acuerdo con la figura P16.29. La rapidez de onda observada es $v = 24.0$ m/s cuando la masa suspendida es $m = 3.00$ kg. (a) ¿Cuál es la masa por unidad de longitud de la cuerda? (b) ¿Cuál es la rapidez de onda cuando la masa suspendida es $m = 2.00$ kg?

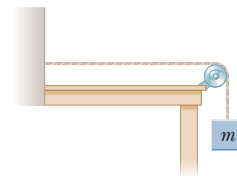


Figura P16.29

Problemas 29 y 47.

30. **Problema de repaso.** Una cuerda ligera, con una masa por unidad de longitud de 8.00 g/m, tiene sus extremos amarrados a dos paredes separadas por una distancia igual a tres cuartos la longitud de la cuerda (figura P16.30, página 503). Un objeto de masa m se suspende del centro de la

cuerda y pone tensión en ésta. (a) Encuentre una expresión para la rapidez de onda transversal en la cuerda como función de la masa del objeto colgante. (b) ¿Cuál debe ser la masa del objeto suspendido de la cuerda si la rapidez de onda es de 60.0 m/s?

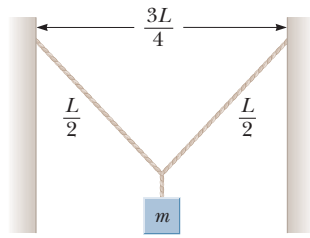


Figura P16.30

31. Pulsos transversales viajan con una rapidez de 200 m/s a lo largo de un alambre de cobre tenso cuyo diámetro es de 1.50 mm. ¿Cuál es la tensión en el alambre? (La densidad del cobre es 8.92 g/cm³.)

Sección 16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

32. En una región lejana del epicentro de un terremoto una onda sísmica se modela como transportadora de energía en una sola dirección sin absorción, tal como lo hace una onda en una cuerda. Suponga que la onda sísmica se mueve de granito a fango con densidad similar pero con un módulo volumétrico mucho menor. Suponga que la rapidez de la onda cae gradualmente en un factor de 25.0, con reflexión despreciable de la onda. (a) Explique si la amplitud del suelo que se agita aumentará o disminuirá. (b) ¿Cambia en un factor predecible? (Este fenómeno condujo en 1989 al colapso de parte de la autopista Nimitz en Oakland, California, durante el terremoto de Loma Prieta.)
33. En una cuerda bajo tensión se generan ondas transversales. ¿En qué factor aumenta o disminuye la potencia requerida si (a) la longitud de la cuerda se duplica y la frecuencia angular permanece constante, (b) la amplitud se duplica y la frecuencia angular se reduce a la mitad, (c) se duplican tanto la longitud de onda como la amplitud y (d) se reducen a la mitad tanto la longitud de la cuerda como la longitud de onda?
34. Ondas sinusoidales de 5.00 cm de amplitud se transmitirán a lo largo de una cuerda que tiene una densidad de masa lineal de 4.00×10^{-2} kg/m. La fuente puede entregar una potencia máxima de 300 W y la cuerda está bajo una tensión de 100 N. ¿Cuál es la frecuencia f más alta a la que puede funcionar la fuente?
35. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.15 \sin(0.80x - 50t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La masa por unidad de longitud de esta cuerda es 12.0 g/m. Determine (a) la rapidez de la onda, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la potencia transmitida por la onda.

36. Una cuerda tensa tiene una masa de 0.180 kg y una longitud de 3.60 m. ¿Qué potencia se debe suministrar a la cuerda para que genere ondas sinusoidales que tengan una amplitud de 0.100 m y una longitud de onda de 0.500 m y viajen con una rapidez de 30.0 m/s?
37. Un alambre largo transporta una onda; un segmento de 6.00 m de la cuerda contiene cuatro longitudes de onda completas y tiene una masa de 180 g. La cuerda vibra sinusoidalmente con una frecuencia de 50.0 Hz y un des-

plazamiento de cresta a valle de 15.0 cm. (La distancia “cresta a valle” es la distancia vertical desde la posición positiva más lejana hasta la posición negativa más lejana.) (a) Escriba la función que describe esta onda que viaja en la dirección x positiva. (b) Determine la potencia a suministrar a la cuerda.

38. Una cuerda horizontal puede transmitir una potencia máxima P_0 (sin romperse) si por ella viaja una onda con amplitud A y frecuencia angular ω . Para aumentar esta potencia máxima, un estudiante dobla la cuerda y usa esta “cuerda doble” como medio. Determine la potencia máxima que se puede transmitir a lo largo de la “cuerda doble” si supone que la tensión en las dos hebras juntas es la misma que la tensión original en la cuerda individual, y también que la frecuencia angular de la onda permanece constante.
39. La función de onda para una onda sobre una cuerda tensa es

$$y(x, t) = 0.350 \sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Si la densidad de masa lineal de la cuerda es 75.0 g/m, (a) ¿cuál es la rapidez promedio a la que se transmite la energía a lo largo de la cuerda? (b) ¿Cuál es la energía contenida en cada ciclo de la onda?

40. Una onda acuática en dos dimensiones se dispersa en ondulaciones circulares. Demuestre que la amplitud A a una distancia r desde la perturbación inicial es proporcional a $1/\sqrt{r}$. *Sugerencia:* considere la energía que porta una ondulación que se mueve hacia fuera.

Sección 16.6 La ecuación de onda lineal

41. Demuestre que la función de onda $y = \ln[b(x - vt)]$ es una solución de la ecuación 16.27, donde b es una constante.
42. (a) Evalúe A en la igualdad escalar $4(7 + 3) = A$. (b) Evalúe A , B y C en la igualdad vectorial $700\hat{i} + 3.00\hat{k} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$. (c) Explique las respuestas para convenir a un estudiante que cree que usted no puede resolver una sola ecuación para tres incógnitas diferentes. (d) ¿Qué pasaría si? La igualdad funcional o identidad $A + B \cos(Cx + Dt + E) = 7.00 \cos(3x + 4t + 2)$ es cierta para todos los valores de las variables x y t , en metros y en segundos, respectivamente. Evalúe las constantes A , B , C , D y E . (e) Explique cómo obtuvo las respuestas al inciso (d).
43. Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x-vt)}$ es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27), donde b es una constante.
44. (a) Demuestre que la función $y(x, t) = x^2 + v^2 t^2$ es una solución a la ecuación de onda. (b) Demuestre que la función en el inciso (a) se puede escribir como $f(x + vt) + g(x - vt)$ y determine las formas funcionales para f y g . (c) ¿Qué pasaría si? Repitalos incisos (a) y (b) para la función $y(x, t) = \sin(x) \cos(vt)$.

Problemas adicionales

45. Las películas se proyectan a una frecuencia de 24.0 cuadros por segundo. Cada cuadro es una fotografía de 19.0 mm de alto, tal y como cada oscilación en una onda tiene la misma longitud. Modele la altura de un cuadro como

la longitud de onda de una onda. ¿Con qué rapidez constante pasa la película en el proyector?

46. La “ola” es un tipo particular de pulso que se puede propagar a través de una gran multitud reunida en un estadio deportivo (figura P16.46). Los elementos del medio son los espectadores, con posición cero cuando están sentados y posición máxima cuando están de pie y elevan sus brazos. Si una gran cantidad de espectadores participa en el movimiento ondulatorio se desarrolla una forma de pulso estable. La rapidez de la onda depende del tiempo de reacción de las personas, que por lo general es del orden de 0.1 s. Estime el orden de magnitud, en minutos, del intervalo de tiempo requerido para que tal pulso dé una vuelta completa en torno a un gran estadio deportivo. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.



Joe Klamar/ATP/Getty Images

Figura P16.46

47. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.20 \sin(0.75\pi x + 18\pi t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La cuerda tiene una densidad de masa lineal de 0.250 kg/m. La tensión en la cuerda la proporciona un arreglo como el que se ilustra en la figura P16.29. ¿Cuál es la masa del objeto suspendido?

48. El lecho marino está sustentado por una capa de basalto que constituye la corteza, o capa superior, de la Tierra en esa región. Bajo esta corteza se encuentra roca peridotita más densa que forma el manto de la Tierra. La frontera entre esas dos capas se llama discontinuidad de Mohorovicic (“Moho” por brevedad). Si una carga explosiva se coloca en la superficie del basalto, se genera una onda sísmica que es reflejada en el Moho. Si la rapidez de esta onda en el basalto es 6.50 km/s y el tiempo de ida y vuelta es 1.85 s, ¿cuál es el espesor de esta corteza oceánica?

49. **Problema de repaso.** Un bloque de 2.00 kg cuelga de una cuerda de caucho y se sostiene de modo que la cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es de 0.500 m y su masa es de 5.00 g. La “constante de resorte” para la cuerda es 100 N/m. El bloque se libera y se detiene momentáneamente en el punto más bajo. (a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en este punto más bajo. (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en esta posición “estirada”? (c) Encuentre la rapidez de una onda transversal sobre la cuerda si el bloque se mantiene en esta posición más baja.

50. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M cuelga de una cuerda de caucho. El bloque se suspende de modo que la

cuerda no se estira. La longitud no estirada de la cuerda es L_0 y su masa es m , mucho menor que M . La “constante de resorte” para la cuerda es k . El bloque se libera y se detiene momentáneamente en el punto más bajo. (a) Determine la tensión en la cuerda cuando el bloque está en el punto más bajo. (b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda en la posición “estirada”? (c) Encuentre la rapidez de una onda transversal en la cuerda si el bloque se mantiene en la posición más baja.

51. Una onda transversal sobre una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y(x, t) = 0.350 \sin(1.25x + 99.6t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. Considere el elemento de la cuerda en $x = 0$. (a) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los primeros dos instantes cuando este elemento tiene una posición de $y = 0.175$ m? (b) ¿Qué distancia recorre la onda durante el intervalo de tiempo encontrado en el inciso (a)?

52. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.150 \sin(0.800x - 50.0t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La masa por longitud de la cuerda es 12.0 g/m. (a) Encuentre la máxima aceleración transversal de un elemento de esta cuerda. (b) Determine la máxima fuerza transversal sobre un segmento de cuerda de 1.00 cm. (c) Establezca cómo se compara esta fuerza con la tensión en la cuerda.

53. **Problema de repaso.** Un bloque de masa M , sostenido por una cuerda, descansa sobre un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo θ con la horizontal (figura P16.53). La longitud de la cuerda es L y su masa es $m \ll M$. Deduzca una expresión para el intervalo de tiempo requerido para que una onda transversal viaje de un extremo a otro de la cuerda.

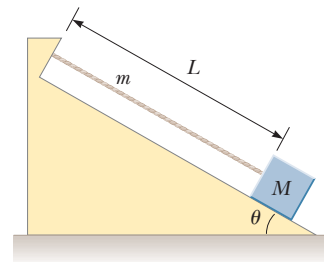


Figura P16.53

54. Un terremoto bajo el mar o un deslizamiento de Tierra puede producir una onda oceánica de corta duración transportando gran energía llamada *tsunami*. Cuando su longitud de onda es grande comparada con la profundidad del océano d , la rapidez de una onda acuática está dada aproximadamente por $v = \sqrt{gd}$. Suponga que un terremoto ocurre a lo largo de la frontera de una placa tectónica que corre de Norte a Sur y produce una cresta de onda tsunami recta que en todas partes se mueve hacia el Oeste. (a) ¿Qué cantidad física puede considerarse constante en el movimiento de cualquier cresta de onda? (b) Explique por qué la amplitud de la onda se incrementa conforme la onda se aproxima a la orilla. (c) Si la onda tiene una amplitud de 1.80 m cuando su rapidez es de 200

m/s, ¿cuál será su amplitud donde el agua tenga 9.00 m de profundidad? (d) Explique por qué se debe esperar que la amplitud sea mayor en la orilla, pero no se puede predecir significativamente mediante su modelo.

- 55. Problema de repaso.** Un bloque de masa $M = 0.450$ kg se une al extremo de una cuerda de $0.003\ 20$ kg de masa; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque rota con rapidez angular constante en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P16.55. ¿Qué ángulo rota el bloque en el intervalo de tiempo durante el cual una onda transversal viaja por la cuerda del centro del círculo al bloque?

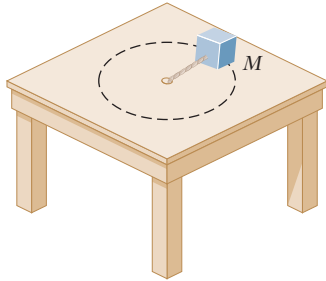


Figura P16.55 Problemas 55, 56 y 57.

- 56. Problema de repaso.** Un bloque de masa $M = 0.450$ kg se une al extremo de una cuerda de masa $m = 0.003\ 20$ kg; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque rota con rapidez angular constante $\omega = 10.0$ rad/s en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P16.55. ¿Qué intervalo de tiempo requiere una onda transversal para viajar por la cuerda desde el centro del círculo hasta el bloque?
- 57. Problema de repaso.** Un bloque de masa M se une al extremo de una cuerda de masa m ; el otro extremo de la cuerda se une a un punto fijo. El bloque rota con rapidez angular constante ω en un círculo sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P16.55. ¿Qué intervalo de tiempo requiere una onda transversal para viajar por la cuerda desde el centro del círculo hasta el bloque?
- 58.** Una cuerda con densidad lineal de 0.500 g/m se mantiene bajo tensión de 20.0 N. A medida que una onda sinusoidal transversal se propaga sobre la cuerda, los elementos de la cuerda se mueven con máxima rapidez $v_{\text{máx}}$. (a) Determine la potencia transmitida por la onda como función de $v_{\text{máx}}$. (b) Establezca, en palabras, la proporcionalidad entre la potencia y $v_{\text{máx}}$. (c) Encuentre la energía contenida en una sección de cuerda de 3.00 m de largo como una función de $v_{\text{máx}}$. (d) Expresé la respuesta al inciso (c) en términos de la masa m de esta sección. (e) Encuentre la energía que la onda transporta al pasar por un punto en 6.00 s.
- 59.** Un alambre de densidad ρ se afila de modo que su área de sección transversal varía con x de acuerdo con

$$A = 1.00 \times 10^{-5} x + 1.00 \times 10^{-6}$$

donde A está en metros cuadrados y x en metros. La tensión en el alambre es T . (a) Deduzca una relación para la rapidez de una onda como función de la posición.

(b) ¿Qué pasaría si? Suponga que el alambre es de aluminio y está bajo una tensión $T = 24.0$ N. Determine la rapidez de onda en el origen y en $x = 10.0$ m.

- 60.** Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Un análisis muestra que para pulsos transversales cortos las ondas a una corta distancia arriba del extremo libre se pueden representar, con buena aproximación, mediante la ecuación de onda lineal estudiada en la sección 16.6. Demuestre que un pulso transversal recorre la longitud de la cuerda en un intervalo de tiempo dado aproximadamente por $\Delta t \approx 2\sqrt{L/g}$. *Sugerencia:* primero encuentre una expresión para la rapidez de onda en cualquier punto a una distancia x del extremo inferior, al considerar la tensión en la cuerda como resultado del peso del segmento debajo de dicho punto.
- 61.** Un pulso que viaja a lo largo de una cuerda con densidad de masa lineal μ se describe mediante la función de onda

$$y = [A_0 e^{-bx}] \sin(kx - \omega t)$$

donde el factor entre corchetes se dice que es la amplitud.

- (a) ¿Cuál es la potencia $P(x)$ que porta esta onda en un punto x ? (b) ¿Cuál es la potencia $P(0)$ que porta esta onda en el origen? (c) Calcule la razón $P(x)/P(0)$.
- 62.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Los tsunamis son ondas en el océano que tienen enormes longitudes de onda (100 a 200 km), y la rapidez de propagación para estas ondas es $v \approx \sqrt{gd_{\text{prom}}}$, donde d_{prom} es la profundidad promedio del agua. Un terremoto en el lecho marino en el Golfo de Alaska produce un tsunami que llega a Hilo, Hawaii, a una distancia de $4\ 450$ km, en un intervalo de tiempo de 5.88 h. (Este método se utilizó en 1856 para estimar la profundidad promedio del océano Pacífico antes de las determinaciones directas acústicas.)
- 63. Problema de repaso.** Un alambre de aluminio se sujeta fuertemente en cada extremo bajo tensión cero a temperatura ambiente. Al reducir la temperatura, lo que resulta en una disminución en la longitud de equilibrio del alambre, aumenta la tensión en éste. Considere que el área de sección transversal del alambre es 5.00×10^{-6} m², una densidad de 2.70×10^3 kg/m³ y un módulo de Young de 7.00×10^{10} N/m², ¿qué deformación $\Delta L/L$ resulta en una rapidez de onda transversal de 100 m/s?
- 64.** Suponga que un objeto de masa M está suspendido de la parte baja de la cuerda de masa m y longitud L del problema 60. (a) Demuestre que el intervalo de tiempo para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda es

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{mg}}(\sqrt{M+m} - \sqrt{M})$$

(b) ¿Qué pasaría si? Demuestre que la expresión en el inciso (a) se reduce al resultado del problema 60 cuando $M = 0$. (c) Demuestre que para $m \ll M$, la expresión en el inciso (a) se reduce a

$$\Delta t = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

Problemas de desafío

- 65.** Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Como se probó en el problema 60, un pulso viaja desde la parte baja hasta lo alto de la cuerda en un intervalo de tiempo aproximado de $\Delta t = 2\sqrt{L/g}$ con una rapidez que varía con la posición x , medida desde el fondo de la cuerda, como $v = \sqrt{gx}$. Suponga que la ecuación de onda lineal de la sección 16.6 describe ondas en todos los puntos de la cuerda. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo un pulso viaja a la mitad de la cuerda? Dé su respuesta como una fracción de la cantidad $2\sqrt{L/g}$. (b) Un pulso comienza a recorrer la cuerda ¿Qué distancia viajó el pulso después de un intervalo de tiempo $\sqrt{L/g}$?
- 66.** Una cuerda en un instrumento musical se mantiene bajo tensión T y se extiende desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = L$. La cuerda está devanada con alambre de tal forma que su masa por unidad de longitud $\mu(x)$ aumenta uniformemente de m_0 en $x = 0$ a μ_L en $x = L$. (a) Encuentre una expresión para $\mu(x)$ como una función de x sobre el intervalo $0 \leq x \leq L$. (b) Encuentre una expresión para el intervalo de tiempo requerido para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda.
- 67.** Si un lazo de cadena se hace girar con gran rapidez, puede rodar a lo largo del suelo como un aro circular sin colap-

sar. Considere una cadena con densidad de masa lineal uniforme μ cuyo centro de masa viaja hacia la derecha con gran rapidez v_0 , como se muestra en la figura P16.67. (a) Determine la tensión en la cadena en términos de μ y v_0 . Suponga que el peso de un eslabón individual es despreciable comparado con la tensión. (b) Si el lazo rueda sobre un borde, la deformación resultante de la cadena hace que dos pulsos transversales se propaguen a lo largo de la cadena, uno en el sentido de las manecillas del reloj y otro en sentido contrario. ¿Cuál es la rapidez de los pulsos que viajan a lo largo de la cadena? (c) ¿Qué ángulo viaja cada pulso durante el intervalo de tiempo en el que el lazo da una revolución?

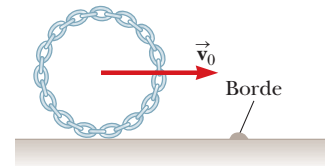


Figura P16.67

Ondas sonoras

CAPÍTULO

17



- 17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras
- 17.2 Rapidez de ondas sonoras
- 17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas
- 17.4 El efecto Doppler

La mayoría de las ondas estudiadas en el capítulo 16 están confinadas a moverse en un medio unidimensional. Por ejemplo, la onda en la figura 16.7 es una construcción puramente matemática moviéndose a lo largo del eje x . La onda en la figura 16.10 está confinada a moverse a lo largo de la longitud de la cuerda. También se han considerado ondas con movimiento a través de un medio bidimensional, como las ondulaciones en la superficie del agua en la introducción a la Parte 2, página 449, y como las ondas moviéndose sobre la superficie del océano en la figura 16.4. En este capítulo se investigan ondas mecánicas que se desplazan a través de medios tridimensionales con cierta estructura volumétrica. Por ejemplo, ondas sísmicas que parten del foco de un terremoto y viajan por el interior tridimensional de la Tierra.

Estudiaremos a las **ondas sonoras**, que viajan en cualquier material, pero es más común experimentarlas como ondas mecánicas propagándose a través del aire para generar la percepción humana de la audición. A medida que las ondas sonoras viajan a través del aire, los elementos de éste son perturbados de sus posiciones de equilibrio. Estos movimientos son acompañados por cambios en densidad y presión del aire a lo largo de la dirección de propagación de la onda. Si la fuente de las ondas sonoras vibra sinusoidalmente, las variaciones de densidad y presión también son sinusoidales. La descripción matemática de las ondas sonoras sinusoidales es muy similar a la analizada en el capítulo 16 para las ondas sinusoidales en cuerdas.

Las ondas sonoras se dividen en tres categorías que cubren diferentes intervalos de frecuencia. (1) Las *ondas audibles* se encuentran dentro del rango de sensibilidad del oído humano. Es posible generarlas en una variedad de formas mediante instrumentos musicales, voces humanas o bocinas. (2) Las *ondas infrasonicas* tienen frecuencias por abajo del intervalo audible. Los elefantes utilizan ondas infrasonicas para comunicarse entre ellos, aun cuando estén separados por varios kilómetros. (3) Las *ondas ultrasónicas* tienen frecuencias por arriba del alcance audible. Es posible que usted haya empleado silbatos "silenciosos" para llamar a su perro. Los perros escuchan con facilidad el sonido ultrasónico que emite este sil-

Tres músicos tocan el cuerno alpino en Valais, Suiza. En este capítulo se explora el comportamiento de ondas sonoras como aquellas provenientes de estos grandes instrumentos musicales. (Stefano Cellai/AGE fotostock)

bato, pero los humanos no pueden detectarlo. Las ondas ultrasónicas también se aplican en la formación de imágenes médicas.

Este capítulo inicia con una discusión de las variaciones de presión en una onda sonora, la rapidez de las ondas sonoras y la intensidad de onda, la cual es una función de la amplitud de onda. Después se proporciona una descripción alternativa de la intensidad de las ondas sonoras que comprime el amplio rango de intensidades a las cuales el oído es sensible, en un rango más pequeño por conveniencia. También se investigan los efectos que el movimiento de las fuentes y los escuchas tienen sobre la frecuencia de un sonido.

17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras

En el capítulo 16 se inició el estudio de ondas al imaginar la creación de un pulso individual viajando por una cuerda (figura 16.1) o por un resorte (figura 16.3). Se hará algo similar para el sonido. En la figura 17.1 se describe gráficamente el movimiento de un pulso sonoro longitudinal unidimensional a través de un tubo largo que contiene un gas compresible. Un pistón en el extremo izquierdo se mueve rápidamente hacia la derecha para comprimir el gas y crear el pulso. Antes de mover el pistón el gas no está perturbado y tiene densidad uniforme, como se representa mediante la región uniformemente coloreada en la figura 17.1a. Cuando el pistón se empuja hacia la derecha (figura 17.1b), el gas justo enfrente de él se comprime (indicado por la región más sombreada); la presión y la densidad en esta región ahora son mayores que sus valores antes de mover el pistón. Cuando el pistón se detiene (figura 17.1c) la región comprimida del gas continúa moviéndose hacia la derecha, lo que corresponde a un pulso longitudinal que viaja a través del tubo con rapidez v .

En el tubo con gas de la figura 17.1 se puede producir una onda sonora *periódica* unidimensional, haciendo que el pistón se mueva en movimiento armónico simple. Los resultados se muestran en la figura 17.2. En esta figura las partes más oscuras de las áreas coloreadas representan regiones en donde el gas está comprimido y la densidad y presión están por arriba de sus valores de equilibrio. Una región comprimida se forma siempre que el pistón se empuja en el tubo. Esta región comprimida, llamada **compresión**, se mueve a través del tubo y comprime continuamente la región justo enfrente de ella misma. Cuando el pistón se jala hacia atrás, el gas frente a él se

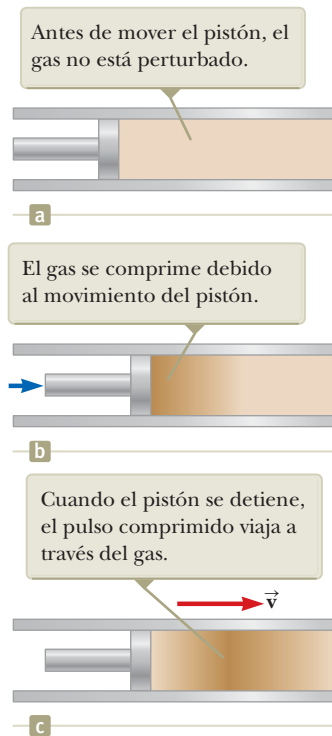


Figura 17.1 Movimiento de un pulso longitudinal a través de un gas compresible. La compresión (región más oscura) es producida por el pistón móvil.

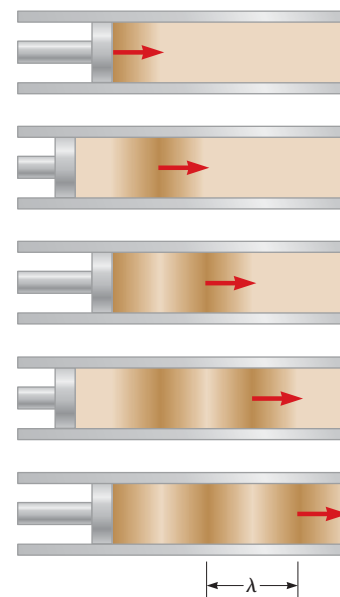


Figura 17.2 Una onda longitudinal se propaga en un tubo que contiene gas. La fuente de la onda es un pistón oscilatorio en el extremo izquierdo.

expande y la presión y la densidad en esta región disminuyen por debajo de sus valores de equilibrio (representadas por las partes más claras de las áreas coloreadas en la figura 17.2). Estas regiones de baja presión, llamadas **enrarecimientos**, también se propagan a lo largo del tubo, siguiendo las compresiones. Ambas regiones se mueven a la rapidez del sonido en el medio.

A medida que el pistón realiza oscilaciones sinusoidales se establecen continuamente regiones de compresión y enrarecimiento. La distancia entre dos compresiones sucesivas (o dos enrarecimientos sucesivos) coincide con la longitud de onda λ de la onda sonora. Como la onda sonora es longitudinal, conforme las compresiones y enrarecimientos viajan por el tubo cualquier elemento pequeño del medio ejecuta un movimiento armónico simple paralelo a la dirección de la onda. Si $s(x, t)$ es la posición de un pequeño elemento respecto a su posición de equilibrio,¹ se puede expresar esta función de posición armónica como

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (17.1)$$

donde $s_{\text{máx}}$ es la posición máxima del elemento respecto al equilibrio. Es frecuente que este parámetro se llame **amplitud de desplazamiento** de la onda. El parámetro k es el número de onda, y ω es la frecuencia angular de la onda. Observe que el desplazamiento del elemento es a lo largo de x , en la dirección de propagación de la onda sonora.

La variación en la presión del gas ΔP , medida respecto al valor de equilibrio, también es periódica con el mismo número de onda e idéntica frecuencia angular que el desplazamiento en la ecuación 17.1. Por lo tanto, se puede escribir

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t) \quad (17.2)$$

donde la **amplitud de presión** $\Delta P_{\text{máx}}$ es el cambio máximo en presión respecto al valor de equilibrio.

Observe que el desplazamiento y la presión se han expresado mediante funciones coseno y seno, respectivamente. En el procedimiento que sigue se justificará esta elección y se relacionará la amplitud de presión $P_{\text{máx}}$ con la amplitud de desplazamiento $s_{\text{máx}}$. Otra vez considere el arreglo pistón-tubo de la figura 17.1. En la figura 17.3a se pone atención a un pequeño elemento cilíndrico de gas no perturbado de longitud Δx y área A . El volumen de este elemento es $V_i = A \Delta x$.

La figura 17.3b muestra este elemento de gas después que la onda sonora se ha movido a una nueva posición. Las dos caras planas del cilindro se mueven distancias diferentes s_1 y s_2 . El cambio en volumen ΔV del elemento en la nueva posición es igual a $A \Delta s$, donde $\Delta s = s_1 - s_2$.

De la definición de módulo volumétrico (vea la ecuación 12.8), la variación de la presión en el elemento de gas se puede expresar en función de su cambio en volumen:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_i}$$

Se sustituye para el volumen inicial y el cambio en volumen del elemento:

$$\Delta P = -B \frac{A \Delta s}{A \Delta x}$$

Ahora la longitud Δx del cilindro tiende a cero, de manera que la razón $\Delta s / \Delta x$ se aproxima a una derivada parcial:

$$\Delta P = -B \frac{\partial s}{\partial x} \quad (17.3)$$

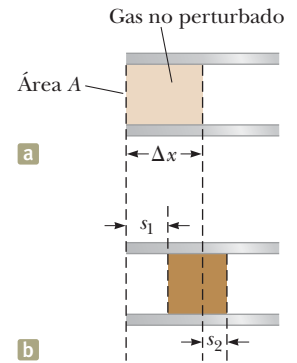


Figura 17.3 (a) Un elemento de gas no perturbado de longitud Δx en un tubo de área de sección transversal A . (b) Cuando una onda sonora se propaga a través del gas, el elemento es transferido a una nueva posición y tiene diferente longitud. Los parámetros s_1 y s_2 describen los desplazamientos de los extremos del elemento respecto a sus posiciones de equilibrio.

¹Aquí se utiliza $s(x, t)$ en lugar de $y(x, t)$ porque el desplazamiento de los elementos del medio no es perpendicular a la dirección x .

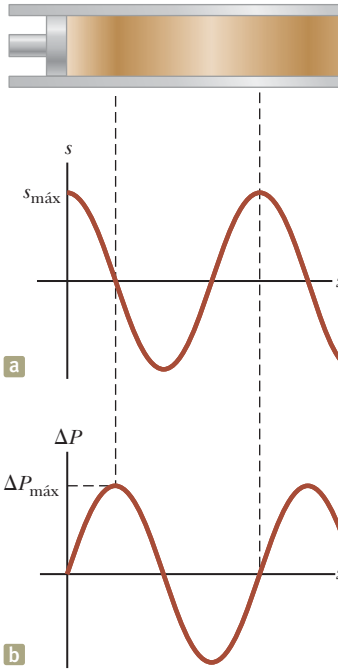


Figura 17.4 (a) Amplitud de desplazamiento y (b) amplitud de presión vs. posición para una onda longitudinal sinusoidal.

Se sustituye la función de posición dada por la ecuación 17.1:

$$\Delta P = -B \frac{\partial}{\partial x} [s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)] = Bs_{\text{máx}} k \sin(kx - \omega t)$$

De este resultado se observa que un desplazamiento descrito por una función coseno conduce a la presión descrita por una función seno. También se encuentra que las amplitudes de desplazamiento y de presión están relacionadas por

$$\Delta P_{\text{máx}} = Bs_{\text{máx}} k \quad (17.4)$$

Esta relación depende del módulo volumétrico del gas, el cual no es fácilmente disponible, como lo es la densidad del gas. En la sección 17.2 se determinará la rapidez del sonido en un gas, entonces será posible aportar una expresión que relacione $\Delta P_{\text{máx}}$ con $s_{\text{máx}}$ en términos de la densidad del gas.

Esta discusión muestra que una onda sonora puede ser descrita en términos de la presión o el desplazamiento. La comparación de las ecuaciones 17.1 y 17.2 indica que la onda de presión está 90° fuera de fase respecto a la onda de desplazamiento. En la figura 17.4 se muestran gráficas de estas funciones. La variación de presión tiene un máximo cuando es cero el desplazamiento respecto al equilibrio, y el desplazamiento relativo al equilibrio es máximo cuando es nula la variación de presión.

Examen rápido 17.1 Si usted sopla a través de la parte superior de una botella de refresco vacía, un pulso de sonido viaja a través del aire en la botella. En el momento cuando el pulso llega al fondo de la botella, ¿cuál es la descripción correcta del desplazamiento de elementos de aire desde sus posiciones de equilibrio y la presión del aire en este punto? (a) El desplazamiento y la presión están en un máximo. (b) El desplazamiento y la presión están en un mínimo. (c) El desplazamiento es cero y la presión es un máximo. (d) El desplazamiento es cero y la presión es un mínimo.

17.2 Rapidez de ondas sonoras

Ahora el estudio iniciado en la sección 17.1 se amplía para evaluar la rapidez del sonido en un gas. En la figura 17.5a considere el elemento cilíndrico de gas entre el pistón y la línea segmentada. Este elemento de gas está en equilibrio bajo la influencia de fuerzas de igual magnitud, del pistón a la izquierda y del resto del gas a la derecha. La magnitud de estas fuerzas es PA , donde P es la presión en el gas y A es el área de sección transversal del tubo.

La figura 17.5b muestra la situación después de un intervalo de tiempo Δt durante el cual el pistón se mueve hacia la derecha con rapidez constante v_x , esto debido a una fuerza desde la izquierda sobre el pistón que se ha incrementado en magnitud a $(P + \Delta P)A$. Al final del intervalo de tiempo Δt , cada porción de gas en el elemento se mueve con rapidez v_x . En general, eso no será cierto para un elemento macroscópico de gas, pero sí será correcto si la longitud del elemento se reduce a un valor infinitesimal.

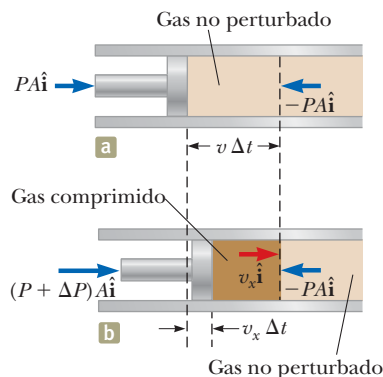


Figura 17.5 (a) Un elemento de gas no perturbado de longitud $v \Delta t$ en un tubo de área de sección transversal A . El elemento está en equilibrio entre fuerzas en los extremos. (b) Cuando el pistón se mueve hacia dentro con velocidad constante v_x debido a una fuerza incrementada a la izquierda, el elemento también se mueve con la misma velocidad.

Para la longitud del elemento de gas no perturbado se selecciona $v \Delta t$, donde v es la rapidez del sonido en el gas y Δt es el intervalo de tiempo entre las configuraciones de las figuras 17.5a y 17.5b. Por lo tanto, al final del intervalo de tiempo Δt la onda sonora justo llegará al extremo derecho del elemento cilíndrico de gas. El gas a la derecha del elemento está no perturbado porque la onda sonora todavía no lo alcanza.

El elemento de gas se modela como un sistema no aislado en términos de cantidad de movimiento. La fuerza del pistón ha proporcionado un impulso al elemento, que a su vez exhibe un cambio en cantidad de movimiento. Por lo tanto, se evalúan ambos lados del teorema impulso-cantidad de movimiento:

$$\Delta \vec{p} = \vec{I} \quad (17.5)$$

A la derecha, el impulso es proporcionado por la fuerza constante debida al incremento de presión sobre el pistón:

$$\vec{I} = \sum \vec{F} \Delta t = (A \Delta P \Delta t) \hat{i}$$

El cambio de presión ΔP se puede relacionar con el cambio de volumen y, a su vez, con las magnitudes de velocidad v y v_x vía el módulo volumétrico:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_i} = -B \frac{(-v_x A \Delta t)}{v A \Delta t} = B \frac{v_x}{v}$$

Así, el impulso queda

$$\vec{I} = \left(AB \frac{v_x}{v} \Delta t \right) \hat{i} \quad (17.6)$$

En el lado izquierdo del teorema impulso-cantidad de movimiento (ecuación 17.5), el cambio en cantidad de movimiento del elemento de gas de masa m es como sigue:

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = (\rho V_i)(v_x \hat{i} - 0) = (\rho v v_x A \Delta t) \hat{i} \quad (17.7)$$

Al sustituir las ecuaciones 17.6 y 17.7 en la ecuación 17.5, se obtiene

$$\rho v v_x A \Delta t = AB \frac{v_x}{v} \Delta t$$

que se reduce a una expresión para la rapidez del sonido en un gas:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (17.8)$$

Es interesante comparar esta expresión con la ecuación 16.18 para la rapidez de las ondas transversales en una cuerda, $v = \sqrt{T/\mu}$. En ambos casos, la rapidez de la onda depende de una propiedad elástica del medio (módulo volumétrico B o tensión en la cuerda T) y de una propiedad inercial del medio (densidad volumétrica ρ o densidad lineal μ). En efecto, la rapidez de todas las ondas mecánicas sigue una expresión de la forma general

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica}}{\text{propiedad inercial}}}$$

Para ondas sonoras longitudinales en una barra sólida de material, por ejemplo, la rapidez del sonido depende del módulo de Young Y y de la densidad ρ . La tabla 17.1 (página 512) proporciona la rapidez del sonido en varios materiales diferentes.

La rapidez del sonido también depende de la temperatura del medio. Para el sonido propagándose en el aire, la relación entre rapidez de la onda y la temperatura del aire es

$$v = 331 \sqrt{1 + \frac{T_C}{273}} \quad (17.9)$$

donde v está en metros/segundo; 331 m/s es la rapidez del sonido en aire a 0°C y T_C es la temperatura del aire en grados Celsius. Con esta ecuación se encuentra que, a 20°C , la rapidez del sonido en aire es aproximadamente 343 m/s.

Tabla 17.1

Rapidez del sonido en diversos medios

Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)
Gases		Líquidos a 25°C		Sólidos^a	
Hidrógeno (0°C)	1 286	Glicerol	1 904	Vidrio Pyrex	5 640
Helio (0°C)	972	Agua de mar	1 533	Hierro	5 950
Aire (20°C)	343	Agua	1 493	Aluminio	6 420
Aire (0°C)	331	Mercurio	1 450	Latón	4 700
Oxígeno (0°C)	317	Queroseno	1 324	Cobre	5 010
		Alcohol metílico	1 143	Oro	3 240
		Tetracloruro de carbono	926	Lucita	2 680
				Plomo	1 960
				Caucho	1 600

^aLos valores dados son para la propagación de ondas longitudinales en medios volumétricos. Las magnitudes de velocidad para ondas longitudinales en barras delgadas son menores, y las magnitudes de velocidad de ondas transversales en volumen son aún más pequeñas.

Esta información proporciona una forma conveniente de estimar la distancia a una tormenta. Primero cuente el número de segundos entre ver el destello del relámpago y escuchar el trueno. Dividir este intervalo de tiempo entre 3 da la distancia aproximada al relámpago en kilómetros, porque 343 m/s es aproximadamente $\frac{1}{3}$ km/s. Dividir el intervalo de tiempo en segundos entre 5 da la distancia aproximada al relámpago en millas, porque la rapidez del sonido es aproximadamente $\frac{1}{5}$ mi/s.

Al tener una expresión (ecuación 17.8) para la rapidez del sonido, entonces se puede dar la conexión entre la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento para una onda sonora (ecuación 17.4):

$$\Delta P_{\text{máx}} = B s_{\text{máx}} k = (\rho v^2) s_{\text{máx}} \left(\frac{\omega}{v} \right) = \rho v \omega s_{\text{máx}} \quad (17.10)$$

Esta expresión es un poco más útil que la ecuación 17.4, porque la densidad de un gas es más disponible que el módulo volumétrico.

17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

En el capítulo 16 se demostró que una onda que viaja sobre una cuerda tensa transporta energía, consistente con la noción de transferencia de energía mediante ondas mecánicas en la ecuación 8.2. Es natural esperar que las ondas sonoras también representen una transferencia de energía. Considere el elemento de gas bajo la acción del pistón en la figura 17.5. Imagine que el pistón se mueve hacia adelante y hacia atrás en movimiento armónico simple con frecuencia angular ω . También imagine que la longitud del elemento se hace muy pequeña de manera que el elemento completo se mueve con la misma velocidad que el pistón. Entonces el elemento se puede modelar como una partícula sobre la cual el pistón realiza trabajo. La razón con la que el pistón efectúa trabajo sobre el elemento en cualquier instante de tiempo está dada por la ecuación 8.19:

$$\text{Potencia} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_x$$

donde se ha utilizado *Potencia* en lugar de *P* para así no confundir la potencia *P* con la presión *P*! La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el elemento de gas está relacionada con la presión, y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_x$ del elemento es la derivada de la función de desplazamiento, así se encuentra que

$$\begin{aligned} \text{Potencia} &= [\Delta P(x, t) A] \hat{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [s(x, t) \hat{\mathbf{i}}] \\ &= [\rho v \omega A s_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t)] \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\rho v \omega A s_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t)] [\omega s_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t)] \\
 &= \rho v \omega^2 A s_{\text{máx}}^2 \sin^2(kx - \omega t)
 \end{aligned}$$

Ahora se determina la potencia promedio en el tiempo durante un periodo de la oscilación. Para cualquier valor dado de x se puede seleccionar $x = 0$, el valor promedio de $\sin^2(kx - \omega t)$ en un periodo T es:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(0 - \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) \Big|_0^T = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$(Potencia)_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A s_{\text{máx}}^2$$

Se define la **intensidad** I de una onda, o la potencia por unidad de área, como la rapidez con la cual la energía transportada por la onda se transfiere a través de una unidad de área A perpendicular a la dirección de viaje de la onda:

$$I \equiv \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{A}$$

(17.11)

◀ Intensidad de una onda sonora

Por lo tanto, en este caso la intensidad es

$$I = \frac{1}{2} \rho v (\omega s_{\text{máx}})^2$$

En consecuencia, la intensidad de una onda sonora periódica es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento y al cuadrado de la frecuencia angular. Esta expresión también puede escribirse en términos de la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$; en este caso, se emplea la ecuación 17.10 para obtener

$$I = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \quad (17.12)$$

Las ondas en una cuerda estudiadas en el capítulo 16 están confinadas a lo largo de una cuerda unidimensional, como se discutió en la introducción a este capítulo. Las ondas sonoras consideradas en las figuras de la 17.1 a la 17.3 y en la 17.5 están restringidas a moverse en una dimensión a lo largo de la longitud del tubo. Sin embargo, como se mencionó en la introducción, las ondas sonoras pueden desplazarse a través de medios tridimensionales con estructura volumétrica, así que coloque al aire libre una fuente sonora y estudie los resultados.

Considere el caso especial de una fuente puntual que emite ondas sonoras por igual en todas direcciones. Si el aire alrededor de la fuente es perfectamente uniforme, la potencia sonora radiada es la misma en todas direcciones, y también la rapidez del sonido es la misma en todas direcciones. En esta situación resulta una **onda esférica**. La figura 17.6 muestra estas ondas esféricas como una serie de arcos circulares concéntricos con la fuente. Cada arco representa una superficie sobre la cual es constante la fase de la onda. A tal superficie de fase constante se le llama **frente de onda**. La distancia radial entre frentes de onda adyacentes que tienen la misma fase es la longitud de onda λ de la onda. Las líneas radiales que se dirigen hacia fuera desde la fuente, que representan la dirección de propagación de las ondas, se llaman **rayos**.

La potencia promedio emitida por la fuente debe estar distribuida uniformemente sobre cada frente de onda esférico de área $4\pi r^2$. Por tanto, la intensidad de la onda a una distancia r de la fuente es

$$I = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{A} = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \quad (17.13)$$

La intensidad disminuye como el cuadrado de la distancia a la fuente. Esta ley inversa del cuadrado recuerda el comportamiento de la gravedad (capítulo 13).

Los rayos son líneas radiales alejándose de la fuente, perpendiculares a los frentes de onda.

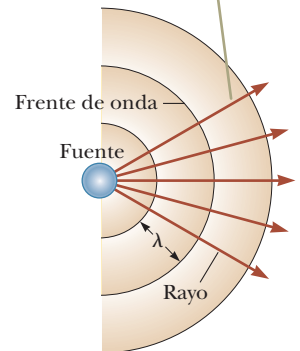


Figura 17.6 Ondas esféricas emitidas por una fuente puntual. Los arcos circulares representan los frentes de onda esféricos que son concéntricos con la fuente.

- E**xamen rápido 17.2 Una cuerda de guitarra que vibra hace muy poco sonido si no está montada en el cuerpo de una guitarra. ¿Por qué el sonido tiene mayor intensidad si la cuerda se une al cuerpo de la guitarra? (a) La cuerda vibra con más energía. (b) La energía abandona la guitarra a mayor rapidez. (c) La potencia del sonido se dispersa sobre un área más grande en la posición del escucha. (d) La potencia del sonido se concentra en un área más pequeña en la posición del escucha. (e) La rapidez del sonido es mayor en el material del cuerpo de la guitarra. (f) Ninguna de estas respuestas es correcta

Ejemplo 17.1

Límites auditivos

Los sonidos más débiles que el oído humano puede detectar a una frecuencia de 1 000 Hz corresponden a una intensidad de aproximadamente $1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$, que se llama *umbral de audición*. Los sonidos más fuertes que el oído tolera a esta frecuencia corresponden a una intensidad de aproximadamente 1.00 W/m^2 , el *umbral de dolor*. Determine la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento asociadas con estos dos límites.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el ambiente más tranquilo que haya experimentado alguna vez. Es probable que la intensidad del sonido, incluso en este ambiente tan tranquilo, sea mayor que el umbral de audición.

Categorizar Se dan las intensidades y se pide calcular las amplitudes de presión y desplazamiento, entonces este problema es de análisis y requiere los conceptos discutidos en esta sección.

Analizar Para obtener la amplitud de la variación de presión en el umbral de audición, utilice la ecuación 17.12, tome la rapidez de las ondas sonoras en el aire como $v = 343 \text{ m/s}$ y la densidad del aire $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$:

$$\begin{aligned}\Delta P_{\text{máx}} &= \sqrt{2\rho v I} \\ &= \sqrt{2(1.20 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})(1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2)} \\ &= 2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2\end{aligned}$$

Con la ecuación 17.10 calcule la correspondiente amplitud de desplazamiento, y recuerde que $\omega = 2\pi f$ (ecuación 16.9):

$$\begin{aligned}s_{\text{máx}} &= \frac{\Delta P_{\text{máx}}}{\rho v \omega} = \frac{2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2}{(1.20 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})(2\pi \times 1000 \text{ Hz})} \\ &= 1.11 \times 10^{-11} \text{ m}\end{aligned}$$

De manera similar, se encuentra que los sonidos más fuertes que puede tolerar el oído humano (el umbral de dolor) corresponden a una amplitud de presión de 28.7 N/m^2 y una amplitud de desplazamiento igual a $1.11 \times 10^{-5} \text{ m}$.

Finalizar Ya que la presión atmosférica es casi 10^5 N/m^2 , el resultado para la amplitud de presión dice que el oído es sensible a fluctuaciones de presión ¡tan pequeñas como 3 partes en 10^{10} ! ¡La amplitud de desplazamiento también es un número notablemente pequeño! Si este resultado para $s_{\text{máx}}$ se compara con el tamaño de un átomo (aproximadamente 10^{-10} m), se concluye que el oído es un detector extremadamente sensible de ondas sonoras.

Ejemplo 17.2

Variaciones de intensidad de una fuente puntual

Una fuente puntual emite ondas sonoras con una salida de potencia promedio de 80.0 W.

(A) Encuentre la intensidad a 3.00 m de la fuente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una pequeña bocina que envía sonido con rapidez promedio de 80.0 W de manera uniforme en todas direcciones. Usted está de pie a 3.00 m de distancia de las bocinas. A medida que el sonido se propaga, la energía de las ondas sonoras se dispersa sobre una esfera siempre en expansión, así la intensidad del sonido disminuye con la distancia.

Categorizar Si evalúa la intensidad mediante una ecuación deducida en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

17.2 continuación

Ya que una fuente puntual emite energía en la forma de ondas esféricas, use la ecuación 17.13 para encontrar la intensidad:

$$I = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{80.0 \text{ W}}{4\pi(3.00 \text{ m})^2} = 0.707 \text{ W/m}^2$$

Esta intensidad es cercana al umbral del dolor.

(B) Hallar la distancia a la cual la intensidad del sonido es $1.00 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$.

SOLUCIÓN

Resuelva para r en la ecuación 17.13 y utilice el valor dado para I :

$$r = \sqrt{\frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80.0 \text{ W}}{4\pi(1.00 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2)}} = 2.52 \times 10^4 \text{ m}$$

Nivel sonoro en decibeles

El ejemplo 17.1 ilustra el amplio rango de intensidades que puede detectar el oído humano. Como este intervalo es muy amplio, es conveniente emplear una escala logarítmica, donde el **nivel sonoro** β (letra griega beta) se define mediante la ecuación

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (17.14)$$

La constante I_0 es la *intensidad de referencia*, considerada como el umbral de audición ($I_0 = 1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$) e I es la intensidad en watts por metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β , donde β se mide² en **decibeles** (dB). En esta escala, el umbral de dolor ($I = 1.00 \text{ W/m}^2$) corresponde a un nivel sonoro de $\beta = 10 \log [(1 \text{ W/m}^2)/(10^{-12} \text{ W/m}^2)] = 10 \log (10^{12}) = 120 \text{ dB}$, y el umbral de audición corresponde a $\beta = 10 \log [(10^{-12} \text{ W/m}^2)/(10^{-12} \text{ W/m}^2)] = 0 \text{ dB}$.

La exposición prolongada a niveles sonoros altos puede dañar seriamente el oído humano. Siempre que los niveles sonoros superen los 90 dB, se recomienda emplear tapones de oídos. Evidencia reciente sugiere que la “contaminación acústica” puede ser un factor que contribuye a la presión arterial alta, ansiedad y nerviosismo. La tabla 17.2 da algunos niveles sonoros típicos.

Tabla 17.2

Niveles sonoros

Fuente de sonido	β (dB)
Avión jet cercano	150
Martillo neumático; ametralladora	130
Sirena; concierto de rock	120
Transporte subterráneo; podadora potente	100
Congestionamiento de tráfico	80
Aspiradora	70
Conversación normal	60
Zumbido de mosquito	40
Susurro	30
Hojas meciéndose	10
Umbral de audición	0

Ejercicio rápido 17.3 Aumentar la intensidad de un sonido en un factor de 100 ocasiona que el nivel sonoro aumente, ¿en qué cantidad? **(a)** 100 dB, **(b)** 20 dB, **(c)** 10 dB, **(d)** 2 dB.

Ejemplo 17.3 Niveles sonoros

Dos máquinas idénticas se colocan a la misma distancia de un trabajador. La intensidad del sonido entregado por cada máquina en funcionamiento en la posición del trabajador es de $2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

(A) Halle el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando una máquina está funcionando.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una situación en la cual una fuente de sonido está activa y se une a una segunda fuente idéntica, como una persona que habla, y entonces una segunda persona habla al mismo tiempo, o un instrumento musical que toca y después se le une un segundo instrumento.

Categorizar Este ejemplo es un problema de análisis relativamente simple que requiere la ecuación 17.14.

continúa

²La unidad *bel* recibe su nombre por el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922). El prefijo *deci-* es el prefijo del SI que representa 10^{-1} .

► 17.3 continuación

Analizar Aplique la ecuación 17.14 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador con una máquina en funcionamiento:

$$\beta_1 = 10 \log \left(\frac{2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 10 \log (2.0 \times 10^5) = 53 \text{ dB}$$

(B) Halle el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando dos máquinas están en funcionamiento.

SOLUTION

Aplique la ecuación 17.14 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador, con el doble de intensidad:

$$\beta_2 = 10 \log \left(\frac{4.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 10 \log (4.0 \times 10^5) = 56 \text{ dB}$$

Finalizar Estos resultados demuestran que cuando se duplica la intensidad el nivel sonoro aumenta sólo en 3 dB. Ese incremento de 3 dB es independiente del nivel sonoro original. (¡Demuéstrelo!)

¿QUÉ PASARÍA SI? La *sonoridad* es una respuesta psicológica a un sonido. Depende tanto de la intensidad como de la frecuencia del sonido. Como regla empírica, una sonoridad duplicada se asocia aproximadamente con un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. (Esta regla empírica es relativamente imprecisa a frecuencias muy bajas o muy altas.) Si la sonoridad de las máquinas en este ejemplo se duplica, ¿cuántas máquinas a la misma distancia del trabajador deben estar en funcionamiento?

Respuesta Con la regla empírica, un doble de sonoridad corresponde a un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= 10 \text{ dB} = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_0} \right) - 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \\ \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) &= 1 \rightarrow I_2 = 10 I_1 \end{aligned}$$

Así, deben estar en funcionamiento diez máquinas para duplicar la sonoridad.

Sonoridad y frecuencia

La explicación del nivel sonoro en decibeles se relaciona con una medición *física* de la intensidad del sonido. Ahora se extenderá la explicación de la sección ¿Qué pasaría si? del ejemplo 17.3 concerniente a la “medición” *psicológica* de la intensidad de un sonido.

De hecho, no se tienen instrumentos en el cuerpo que puedan desplegar valores numéricos de las reacciones a los estímulos. Se tienen que “calibrar” las reacciones de algún modo para comparar diferentes sonidos con un sonido de referencia, pero esto no es fácil de lograr. Por ejemplo, antes se mencionó que la intensidad umbral es 10^{-12} W/m^2 , que corresponde a un nivel de intensidad de 0 dB. En realidad, este valor es el umbral sólo para un sonido con frecuencia de 1 000 Hz, que es una frecuencia de referencia estándar en acústica. Si se realiza un experimento para medir la intensidad umbral a otras frecuencias, se encuentra una variación distinta de este umbral como función de la frecuencia. Por ejemplo, a 100 Hz, un sonido apenas audible debe tener una intensidad de ¡aproximadamente 30 dB! Por desgracia, no existe una correspondencia simple entre las mediciones físicas y las “mediciones” psicológicas. El sonido de 100 Hz y 30 dB es psicológicamente “igual” al sonido de 1 000 Hz y 0 dB (ambos son apenas audibles), pero no son físicamente iguales a nivel sonoro ($30 \text{ dB} \neq 0 \text{ dB}$).

Mediante sujetos de prueba se ha estudiado la respuesta humana al sonido, y los resultados se muestran en el área blanca de la figura 17.7, junto con la frecuencia aproximada y los rangos de nivel sonoro de otras fuentes sonoras. La curva inferior del área blanca corresponde al umbral de audición. A partir de este diagrama, es clara su variación con la frecuencia. Note que los humanos son sensibles a frecuencias en el intervalo de casi 20 Hz hasta aproximadamente 20 000 Hz. La frontera superior del área blanca es el umbral de dolor. Aquí la frontera del área blanca parece recta por-

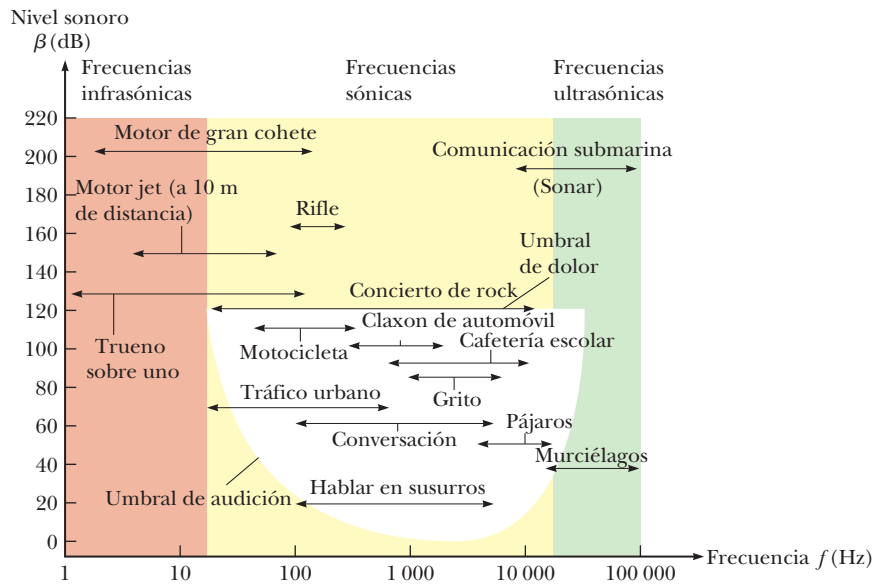


Figura 17.7 Intervalos aproximados de frecuencia y nivel sonoro de varias fuentes y la audición humana normal, mostrada por el área blanca. (Tomado de R. L. Reese, *University Physics*, Pacific Grove, Brooks/Cole, 2000.)

que la respuesta psicológica es relativamente independiente de la frecuencia a este elevado nivel sonoro.

El cambio más dramático con la frecuencia está en la región inferior izquierda del área blanca, para frecuencias bajas y niveles de intensidad bajos. Los oídos humanos son insensibles en esta región. Si usted escucha su estéreo y los sonidos graves (frecuencias bajas) y agudos (frecuencias altas) se equilibran a un volumen alto, intente bajar el volumen y escuchar de nuevo. Probablemente notará que el grave parece débil, debido a la insensibilidad del oído a frecuencias bajas en niveles sonoros bajos, como se muestra en la figura 17.7.

17.4 El efecto Doppler

Tal vez haya notado cómo varía el sonido del claxon de un vehículo a medida que éste se aleja. La frecuencia del sonido que escucha mientras el vehículo se aproxima a usted es más alta que la frecuencia que escucha mientras se aleja. Esta experiencia es un ejemplo del **efecto Doppler**.³

Para comprender qué causa este aparente cambio de frecuencia, imagínese en un bote anclado en un mar tranquilo donde las ondas tienen un periodo $T = 3.0$ s. Así, cada 3.0 s una cresta golpea su bote. La figura 17.8a muestra esta situación, con las ondas acuáticas moviéndose hacia la izquierda. Si usted pone su reloj en $t = 0$ justo cuando una cresta golpea, la lectura en el reloj es 3.0 s cuando llegue la siguiente cresta, 6.0 s cuando la tercera cresta golpea, y así sucesivamente. A partir de estas

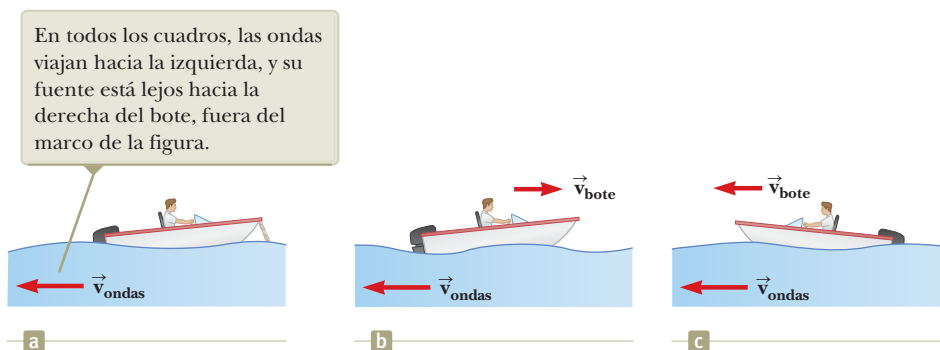


Figura 17.8 (a) Ondas moviéndose hacia un bote estacionario. (b) El bote se mueve hacia la fuente de ondas. (c) El bote se mueve alejándose de la fuente de ondas.

³ Llamado en honor del físico austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853), quien predijo en 1842 el efecto tanto para ondas sonoras como para ondas luminosas.

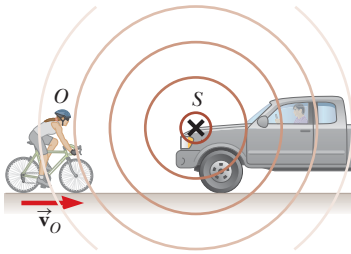


Figura 17.9 Un observador O (el ciclista) se mueve con una rapidez v_O hacia una fuente puntual estable S , el claxon de una camioneta estacionada. El observador escucha una frecuencia f' mayor que la frecuencia de la fuente.

observaciones, concluye que la frecuencia de la onda es $f = 1/T = 1/(3.0 \text{ s}) = 0.33 \text{ Hz}$. Ahora suponga que enciende su motor y se dirige directamente hacia las ondas que se acercan, como en la figura 17.8b. Una vez más pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea el frente (la proa) de su bote. Sin embargo, ahora, ya que se mueve hacia la cresta de onda siguiente mientras ella se mueve hacia usted, lo golpea a menos de 3.0 s después del primer golpe. En otras palabras, el periodo que ahora observa es más corto que el periodo de 3.0 s que observó cuando estaba estacionario. Ya que $f = 1/T$, observa una frecuencia ondulatoria mayor que cuando estaba en reposo.

Si usted da vuelta y se mueve en la misma dirección que las ondas (figura 17.8c), se observa el efecto opuesto. Pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea la parte trasera del bote (la popa). Ya que ahora se mueve alejándose de la siguiente cresta, en su reloj transcurren más de 3.0 s cuando lo alcanza dicha cresta. Por lo tanto, observa una frecuencia más baja que cuando estaba en reposo.

Estos efectos se presentan porque la rapidez *relativa* entre su bote y las ondas depende de la dirección de viaje y de la rapidez de su bote. (Vea la sección 4.6.) Cuando se mueve hacia la derecha en la figura 17.8b, esta rapidez relativa es mayor que la rapidez de la onda, lo cual conduce a la observación de una frecuencia aumentada. Al dar vuelta y moverse hacia la izquierda, la rapidez relativa es menor, como lo es la frecuencia observada de las ondas acuáticas.

Ahora examine una situación análoga con ondas sonoras en la cual las ondas de agua se convierten en ondas sonoras, el agua se convierte en aire y la persona en el bote ahora es un observador que escucha el sonido. En este caso, un observador O se mueve y una fuente sonora S es estacionaria. Para simplificar, se supone que el aire también es estable y que el observador va directo hacia la fuente (figura 17.9). El observador se mueve con una rapidez v_O hacia una fuente puntual estable ($v_S = 0$), donde *estable* significa en reposo respecto al medio, aire.

Si una fuente puntual emite ondas sonoras y el medio es uniforme, las ondas se mueven con la misma rapidez en todas direcciones, se alejan radialmente de la fuente; el resultado es una onda esférica, como se mencionó en la sección 17.3. La distancia entre frentes de onda adyacentes es igual a la longitud de onda λ . En la figura 17.9 los círculos son las intersecciones de estos frentes de onda tridimensionales con el papel en dos dimensiones.

Sean f la frecuencia de la fuente, λ la longitud de onda y v la rapidez del sonido en la figura 17.9. Si el observador también fuera estable detectaría frentes de onda a una frecuencia f . (Es decir, cuando $v_O = 0$ y $v_S = 0$, la frecuencia observada es igual a la frecuencia de la fuente.) Cuando el observador se mueve hacia la fuente, la rapidez de las ondas relativa al observador es $v' = v + v_O$, como en el caso del bote en la figura 17.8, pero la longitud de onda λ no se altera. Por tanto, al emplear la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, puede decirse que la frecuencia f' que escucha el observador está *aumentada* y está dada por

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_O}{\lambda}$$

Ya que $\lambda = v/f$, f' se puede expresar como

$$f' = \left(\frac{v + v_O}{v} \right) f \quad (\text{observador en movimiento hacia la fuente}) \quad (17.15)$$

Si el observador se aleja de la fuente, la rapidez de la onda relativa al observador es $v' = v - v_O$. En este caso la frecuencia escuchada por el observador queda *reducida* y está dada por

$$f' = \left(\frac{v - v_O}{v} \right) f \quad (\text{observador alejándose de la fuente}) \quad (17.16)$$

Estas últimas dos ecuaciones se pueden reducir a una sola ecuación si se adopta una convención de signo. Si un observador se mueve con rapidez v_o respecto a una fuente estacionaria, la frecuencia escuchada por el observador está dada por la

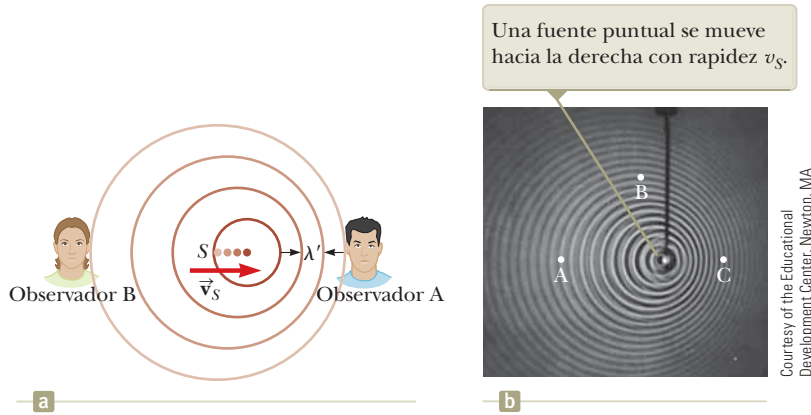


Figura 17.10 (a) Una fuente S se mueve con una rapidez v_s hacia un observador estacionario A y se aleja de un observador estable B . El observador A escucha una frecuencia aumentada, y el observador B escucha una frecuencia reducida. (b) El efecto Doppler en el agua observado en un tanque de ondas. Las letras mostradas en la fotografía se refieren al Examen rápido 17.4.

ecuación 17.15, con v_o interpretada como sigue: se emplea un valor positivo para v_o cuando el observador se mueve hacia la fuente, y se utiliza un valor negativo cuando el observador se aleja de la fuente.

Ahora suponga que la fuente está en movimiento y que el observador queda en reposo. Si la fuente avanza directo hacia el observador A en la figura 17.10a, cada nueva onda es emitida desde una posición a la derecha del origen de la onda previa. Como resultado, los frentes de onda escuchados por el observador están más juntos de lo que estarían si la fuente no se moviera. (La figura 17.10b muestra este efecto para ondas moviéndose en la superficie del agua.) Así, la longitud de onda λ' medida por el observador A es más corta que la longitud de onda λ de la fuente. Durante cada vibración, que dura un intervalo de tiempo T (el periodo), la fuente se mueve una distancia $v_s T = v_s / f$ y la longitud de onda se acorta en esta cantidad. Por lo tanto, la longitud de onda observada λ' es

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_s}{f}$$

Como $\lambda = v/f$, la frecuencia f' que escucha el observador A es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - (v_s/f)} = \frac{v}{(v/f) - (v_s/f)} \quad (17.17)$$

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_s} \right) f \quad (\text{fuente móvil hacia el observador})$$

Es decir, la frecuencia observada *aumenta* siempre que la fuente se mueva hacia el observador.

Cuando la fuente se aleja de un observador estacionario, como es el caso del observador B en la figura 17.10a, el observador mide una longitud de onda λ' que es *mayor* que λ y escucha una frecuencia *reducida*.

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_s} \right) f \quad (\text{fuente alejándose del observador}) \quad (17.18)$$

La relación general para la frecuencia observada cuando una fuente es móvil y un observador está en reposo, se puede expresar mediante la ecuación 17.17, con la misma convención de signo aplicada a v_s como se aplicó a v_o : se emplea un valor positivo para v_s cuando la fuente se mueve hacia el observador, y un valor negativo si la fuente se aleja del observador.

Por último, al combinar las ecuaciones 17.15 y 17.17 se obtiene la siguiente relación general para la frecuencia observada que incluye las cuatro condiciones descritas en las ecuaciones 17.15 a la 17.18:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f \quad (17.19)$$

Prevención de riesgos ocultos 17.1

El efecto Doppler no depende de la distancia Algunas personas creen que el efecto Doppler depende de la distancia entre la fuente y el observador. Aunque la *intensidad* de un sonido varía a medida que la distancia cambia, la *frecuencia* aparente sólo depende de la rapidez relativa de la fuente y el observador. Cuando usted escucha una fuente que se aproxima, detectará intensidad creciente pero frecuencia constante. Mientras la fuente pasa, escuchará que la frecuencia cae súbitamente a un nuevo valor constante y la intensidad comienza a disminuir.

En esta expresión, los signos para los valores sustituidos para v_o y v_s dependen de la dirección de la velocidad. Se emplea un valor positivo para movimiento del observador o la fuente *hacia* el otro (asociado con un *aumento* en la frecuencia observada), y un valor negativo se utiliza para movimiento de uno *alejándose* del otro (asociado con una disminución en la frecuencia observada).

Aunque el efecto Doppler se experimenta más comúnmente con ondas sonoras, es un fenómeno típico a todas las ondas. Por ejemplo, el movimiento relativo de la fuente y el observador produce un corrimiento de frecuencia en las ondas luminosas. El efecto Doppler se usa en los sistemas de radar policíacos para medir la rapidez de los vehículos automotores. Del mismo modo, los astrónomos emplean el efecto para determinar la rapidez de estrellas, galaxias y otros objetos celestes en relación con la Tierra.

Ejercicio rápido 17.4 Considere los detectores de ondas acuáticas en tres posiciones A, B y C de la figura 17.9b. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) La rapidez de onda es mayor en la posición A. (b) La rapidez de onda es mayor en la posición C. (c) La longitud de onda detectada es mayor en la posición B. (d) La longitud de onda detectada es mayor en la posición C. (e) La frecuencia detectada es mayor en la posición C. (f) La frecuencia detectada es mayor en la posición A.

Ejercicio rápido 17.5 Usted está de pie sobre una plataforma en una estación de tren y escucha un tren que se aproxima a la estación con velocidad constante. Mientras el tren se aproxima, pero antes de que llegue, ¿qué escucha? (a) La intensidad y la frecuencia del sonido aumentan, (b) la intensidad y la frecuencia del sonido disminuyen, (c) la intensidad aumenta y la frecuencia disminuye, (d) la intensidad disminuye y la frecuencia aumenta, (e) la intensidad aumenta y la frecuencia permanece igual, (f) la intensidad disminuye y la frecuencia permanece igual.

Ejemplo 17.4

El radio-reloj descompuesto

AM

Su radio-reloj lo despierta con un sonido estable e irritante de 600 Hz de frecuencia. Una mañana funciona mal y no se puede apagar. Frustrado, arroja el radio-reloj por la ventana de su dormitorio en el cuarto piso, a 15.0 m del suelo. Suponga que la rapidez del sonido es de 343 m/s. Mientras escucha el radio-reloj que cae, ¿qué frecuencia escucha justo antes de que lo oiga chocar con el suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La rapidez del radio-reloj aumenta mientras cae. Por lo tanto, es una fuente de sonido móvil alejándose de usted con una rapidez creciente, de modo que la frecuencia que escucha debe ser menor que 600 Hz.

Categorizar Este problema se clasifica como uno en el que se combina el modelo de *partícula bajo una aceleración constante* para el radio en caída con la comprensión del corrimiento en frecuencia del sonido debido al efecto Doppler.

Analizar Ya que el radio-reloj se modela como una partícula bajo aceleración constante debida a la gravedad, use la ecuación 2.13 para expresar la rapidez de la fuente de sonido:

$$(1) \quad v_s = v_{yi} + a_y t = 0 - gt = -gt$$

Mediante la ecuación 2.16 obtenga el tiempo en que el radio-reloj golpea el suelo:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{-\frac{2y_f}{g}}$$

Sustituya en la ecuación (1):

$$v_s = (-g)\sqrt{-\frac{2y_f}{g}} = -\sqrt{-2gy_f}$$

Aplique la ecuación 17.19 para determinar la frecuencia de corrimiento Doppler que se escucha del radio-reloj en caída:

$$f' = \left[\frac{v + 0}{v - (-\sqrt{-2gy_f})} \right] f = \left(\frac{v}{v + \sqrt{-2gy_f}} \right) f$$

17.4 continuación

Sustituya valores numéricos:

$$f' = \left[\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + \sqrt{-2(9.80 \text{ m/s}^2)(-15.0 \text{ m})}} \right] (600 \text{ Hz})$$

$$= 571 \text{ Hz}$$

Finalizar La frecuencia es menor que la frecuencia real de 600 Hz porque el radio-reloj se aleja. Si cayera desde un piso superior, de modo que pasara por debajo de $y = -15.0 \text{ m}$, el radio-reloj continuaría acelerando y la frecuencia seguiría disminuyendo.

Ejemplo 17.5

Submarinos Doppler

Un submarino (sub A) viaja a través del agua con una rapidez de 8.00 m/s y emite una onda de sonar con una frecuencia de $1\,400 \text{ Hz}$. La rapidez del sonido en el agua es de $1\,533 \text{ m/s}$. Un segundo submarino (sub B) se localiza de modo que ambos submarinos viajan directamente uno hacia el otro. El segundo submarino se mueve a 9.00 m/s .

(A) ¿Qué frecuencia detecta un observador que viaja en el sub B mientras los submarinos se aproximan entre sí?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aun cuando el problema involucra submarinos móviles en agua, hay un efecto Doppler tal como existe cuando usted está en un automóvil en movimiento y escucha un sonido que se mueve a través del aire desde otro auto.

Categorizar Ya que ambos submarinos se mueven, este problema se clasifica como uno que involucra el efecto Doppler para una fuente móvil y un observador en movimiento.

Analizar Aplique la ecuación 17.19 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B y tenga cuidado con los signos de las rapidezces de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+8.00 \text{ m/s})} \right] (1\,400 \text{ Hz}) = 1\,416 \text{ Hz}$$

(B) Los submarinos apenas evitan el choque. ¿Qué frecuencia detecta un observador en el sub B mientras los submarinos se alejan uno del otro?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 17.19 para encontrar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B, y de nuevo sea cuidadoso con los signos asignados a las rapidezces de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (-9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (-8.00 \text{ m/s})} \right] (1\,400 \text{ Hz}) = 1\,385 \text{ Hz}$$

Note que la frecuencia disminuye de $1\,416 \text{ Hz}$ a $1\,385 \text{ Hz}$ conforme los submarinos se pasan. Este efecto es similar a la caída en frecuencia que usted escucha cuando un automóvil pasa a su lado mientras suena el claxon.

(C) Mientras los submarinos se aproximan mutuamente, algo del sonido desde el sub A se refleja desde el sub B y regresa al sub A. Si este sonido lo detectara un observador en el sub A, ¿cuál sería su frecuencia?

SOLUCIÓN

El sonido de frecuencia aparente de $1\,416 \text{ Hz}$ que encontró en la parte (A) se refleja de una fuente móvil (sub B) y después lo detecta un observador móvil (sub A). Determine la frecuencia detectada por el sub A:

$$f'' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f'$$

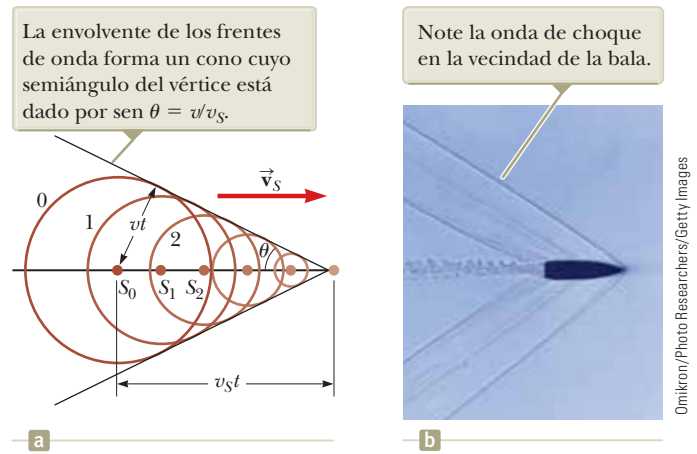
$$= \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+8.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+9.00 \text{ m/s})} \right] (1\,416 \text{ Hz}) = 1\,432 \text{ Hz}$$

continúa

17.5 continuación

Finalizar Esta técnica la utilizan los oficiales de policía para medir la rapidez de un auto en movimiento. Desde la patrulla se emiten microondas que se reflejan en el auto en movimiento. Al detectar la frecuencia de corrimiento Doppler de las microondas reflejadas, el oficial de policía puede obtener la rapidez del auto.

Figura 17.11 (a) Una representación de una onda de choque producida cuando una fuente se mueve de S_0 hacia la derecha con una rapidez v_s que es mayor que la rapidez de onda v en el medio. (b) Fotografía estroboscópica de una bala moviéndose con rapidez supersónica a través del aire caliente sobre una vela.



Ondas de choque

Considere ahora lo que sucede cuando la rapidez v_s de una fuente *supera* la rapidez de onda v . Esta situación se muestra gráficamente en la figura 17.11a. Los círculos representan frentes de onda esféricos emitidos por la fuente en diferentes momentos durante su movimiento. En $t = 0$, la fuente está en S_0 con desplazamiento hacia la derecha. En tiempos posteriores la fuente está en S_1 , y luego en S_2 y así sucesivamente. En el tiempo t el frente de onda con centro en S_0 alcanza un radio vt . En este mismo intervalo de tiempo la fuente recorre una distancia $v_s t$. En la figura 17.11a observe que puede dibujarse una línea tangente a todos los frentes de onda generados en varios instantes. Por lo tanto, la envolvente de estos frentes de onda es un cono cuyo semiángulo de vértice θ (el “ángulo Mach”) está dado por

$$\sin \theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$$

La razón v_s/v se conoce como *número de Mach*, y el frente de onda cónico que se produce cuando $v_s > v$ (rapidez supersónica) se conoce como *onda de choque*. Una analogía interesante a las ondas de choque son los frentes de onda en forma de V producidos por un bote (la onda de proa) cuando la rapidez de éste supera la rapidez de las ondas en la superficie del agua (figura 17.12).

Los aviones jet que viajan a velocidades supersónicas producen ondas de choque, que son responsables del fuerte “estampido sónico” que uno escucha. La onda de choque lleva una gran cantidad de energía concentrada en la superficie del cono, con grandes variaciones de presión correspondientes. Tales ondas de choques son desagradables de escuchar y pueden causar daño a los edificios cuando los aviones vuelan supersónicamente a bajas altitudes. En efecto, un avión que vuela con rapidez supersónica produce un doble estampido porque se forman dos ondas de choque, una desde la nariz del avión y otra desde la cola. Las personas cercanas a la trayectoria de un transbordador espacial que se aproxima a su punto de aterrizaje con frecuencia reportan escuchar lo que suena como dos crujidos de trueno muy cerca-namente espaciados.



Robert Holland/Stone/Getty Images

Figura 17.12 La onda de proa con forma en V de un bote se presenta porque la rapidez de éste es mayor que la rapidez de las ondas acuáticas que él genera. Una onda de proa es análoga a una onda de choque formada por un avión que viaja más rápido que el sonido.

- Ejamen rápido 17.6** Un avión que vuela con una velocidad constante se mueve desde una masa de aire frío hacia una masa de aire caliente. ¿El número Mach (a) aumenta, (b) disminuye o (c) permanece igual?

Resumen

Definiciones

■ La **intensidad** de una onda sonora periódica, que es la potencia por unidad de área, es

$$I \equiv \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{A} = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \quad (17.11, 17.12)$$

■ El **nivel sonoro** de una onda sonora en decibeles es

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (17.14)$$

La constante I_0 es una intensidad de referencia que usualmente se considera como el umbral de audición ($1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$), e I es la intensidad de la onda sonora en watts por metro cuadrado.

Conceptos y principios

■ Las ondas sonoras son longitudinales y viajan a través de un medio compresible con una rapidez que depende de las propiedades elásticas e inerciales de dicho medio. La rapidez del sonido en un gas con un módulo volumétrico B y una densidad ρ es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (17.8)$$

■ Para ondas sonoras sinusoidales, la variación en la posición de un elemento del medio es

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (17.1)$$

y la variación en presión respecto al valor de equilibrio es

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t) \quad (17.2)$$

donde $\Delta P_{\text{máx}}$ es la **amplitud de presión**. La onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento. La relación entre $s_{\text{máx}}$ y $\Delta P_{\text{máx}}$ es

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \quad (17.10)$$

■ El cambio en la frecuencia escuchada por un observador, siempre que hay movimiento relativo entre una fuente de ondas sonoras y el observador, se llama **efecto Doppler**. La frecuencia observada es

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f \quad (17.19)$$

En esta expresión los signos para los valores sustituidos para v_o y v_s dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo para la rapidez del observador o fuente se sustituye si la velocidad de uno es hacia el otro, mientras que un valor negativo representa una velocidad de uno alejándose del otro.

Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

- La tabla 17.1 muestra que la rapidez del sonido por lo general tiene un orden de magnitud mayor en sólidos que en gases. ¿A qué puede atribuirse más directamente este valor más alto? (a) La diferencia en densidad entre sólidos y gases, (b) la diferencia en compresibilidad entre sólidos y gases, (c) el tamaño limitado de un objeto sólido en comparación con un gas libre, (d) la imposibilidad de mantener un gas bajo tensión significativa.
- Dos sirenas A y B funcionan de manera que la frecuencia de A es el doble que la frecuencia de B. Comparada con la rapidez del sonido de A, la rapidez del sonido de B es (a) el doble, (b) la mitad, (c) cuatro veces más rápido, (d) un cuarto de rápido o (e) la misma.
- Cuando usted viaja en su auto en la carretera se le aproxima una ambulancia a gran rapidez desde la parte de atrás (figura PO17.3) cuya sirena funciona a una frecuencia de

500 Hz. ¿Cuál enunciado es correcto? (a) Usted escucha una frecuencia menor que 500 Hz. (b) Escucha una frecuencia igual a 500 Hz. (c) Escucha una frecuencia mayor que 500 Hz. (d) Usted escucha una frecuencia mayor que 500 Hz, mientras que el conductor de la ambulancia escu-



Figura P017.3

- cha una frecuencia menor que 500 Hz. (e) Usted escucha una frecuencia menor que 500 Hz, mientras que el conductor de la ambulancia escucha una frecuencia de 500 Hz.
4. ¿Qué le ocurre a una onda sonora cuando viaja desde el aire hacia el agua? (a) Su intensidad aumenta. (b) Su longitud de onda disminuye. (c) Su frecuencia aumenta. (d) Su frecuencia no cambia. (e) Su velocidad disminuye.
 5. La campana de una iglesia suena una vez. A 300 m enfrente de ésta la intensidad sonora máxima es $2 \mu\text{W}/\text{m}^2$. A 950 m detrás de la iglesia la intensidad máxima es $0.2 \mu\text{W}/\text{m}^2$. ¿Cuál es el motivo principal para la diferencia en intensidad? (a) La mayor parte del sonido es absorbida por el aire antes de llegar muy lejos desde la fuente. (b) La mayor parte del sonido es absorbida por el suelo mientras viaja alejándose de la fuente. (c) La campana transmite el sonido principalmente hacia el frente. (d) A mayor distancia la potencia se dispersa sobre un área más grande.
 6. Si una fuente sonora de 1.00 kHz se mueve con una rapidez de 50.0 m/s hacia un escucha que se mueve a 30.0 m/s alejándose de la fuente, ¿cuál es la frecuencia aparente captada por el escucha? (a) 796 Hz, (b) 949 Hz, (c) 1 000 Hz, (d) 1 068 Hz, (e) 1 273 Hz.
 7. Una onda sonora se puede caracterizar como (a) una onda transversal, (b) una onda longitudinal, (c) una onda transversal o una onda longitudinal, dependiendo de la naturaleza de su fuente, (d) una que no transporta energía, o (e) una onda que no requiere un medio para ser transmitida de un lugar a otro.
 8. Suponga que un cambio en la fuente de sonido reduce la longitud de onda de una onda sonora en el aire en un factor de 2. (i) ¿Qué ocurre con su frecuencia? (a) Aumenta en un factor de 4. (b) Aumenta en un factor de 2. (c) No cambia. (d) Disminuye en un factor de 2. (e) Cambia por un factor impredecible. (ii) ¿Qué sucede con su rapidez? Elija entre las mismas posibilidades como en la parte (i).
 9. Una fuente puntual transmite sonido en un medio uniforme. Si la distancia desde la fuente se triplica, ¿cómo cambia la intensidad? (a) Se convierte en un noveno. (b) Se convierte en un tercio. (c) No cambia. (d) Se vuelve tres veces más grande. (e) Se vuelve nueve veces más grande.
 10. Suponga que un observador y una fuente de sonido están en reposo respecto al suelo y un fuerte viento sopla alejándose de la fuente hacia el observador. (i) ¿Qué efecto tiene el viento sobre la frecuencia observada? (a) Hace que aumente. (b) Hace que disminuya. (c) No genera cambios. (ii) ¿Qué efecto tiene el viento sobre la longitud de onda observada de la onda? Elija entre las mismas posibilidades del inciso (i). (iii) ¿Qué efecto tiene el viento sobre la rapidez observada de la onda? Elija entre las mismas posibilidades como en el inciso (i).
 11. Una fuente de sonido vibra con frecuencia constante. Clasifique la frecuencia del sonido observado en los siguientes casos, de mayor a menor. Si dos frecuencias son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. Todos los movimientos mencionados tienen la misma rapidez, 25 m/s. (a) La fuente y el observador son estacionarios. (b) La fuente se mueve hacia un observador estacionario. (c) La fuente se aleja de un observador estacionario. (d) El observador se mueve hacia una fuente estacionaria. (e) El observador se aleja de una fuente estacionaria.
 12. Con un medidor sensible del nivel sonoro usted mide que el sonido de una araña que corre es -10 dB . ¿Qué implica el signo negativo? (a) La araña se aleja de usted. (b) La frecuencia del sonido es muy baja para ser audible a los humanos. (c) La intensidad del sonido es muy débil para ser audible a los humanos. (d) Cometió un error: los signos negativos no encajan con los logaritmos.
 13. Al duplicar la potencia de salida de una fuente sonora que sólo emite una frecuencia, ¿qué incremento ocurrirá en su nivel en decibeles? (a) 0.50 dB, (b) 2.0 dB, (c) 3.0 dB, (d) 4.0 dB, (e) arriba de 20 dB.
 14. De los siguientes sonidos, ¿cuál tiene más probabilidad de alcanzar un nivel sonoro de 60 dB? (a) Un concierto de rock, (b) el voltear una página de este libro, (c) una conversación en la mesa durante la cena, (d) una animada multitud en un partido de fútbol.

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. ¿Cómo puede un objeto moverse respecto a un observador de modo que el sonido proveniente de él no se corra en frecuencia?
2. Las antiguas cámaras de enfoque automático enviaban un pulso de sonido y medían el intervalo de tiempo requerido para que el pulso llegara al objeto, se reflejara ahí y retornara para ser detectado. ¿La temperatura del aire puede afectar el enfoque de la cámara? Las cámaras actuales utilizan un sistema infrarrojo más confiable.
3. Una amiga sentada en su automóvil, lejos en el camino, agita las manos y comienza a sonar su claxon al mismo tiempo. ¿A qué distancia debe estar para que usted calcule la rapidez del sonido a dos cifras significativas al medir el intervalo de tiempo necesario para que el sonido llegue hasta usted?
4. Al escuchar una banda u orquesta, ¿cómo puede determinar que la rapidez del sonido es la misma para todas las frecuencias?

5. Explique cómo la distancia a un relámpago (figura PC17.5) puede determinarse si se cuentan los segundos transcurridos entre el destello y el sonido del trueno?
6. Usted maneja hacia un acantilado y suena el claxon. ¿Existe corrimiento Doppler del sonido cuando escucha el eco? Si así ocurre, ¿es similar a una fuente móvil o a un observador en movimiento? ¿Qué sucede si la reflexión no ocurre en el acantilado, sino en la parte delantera de una enorme nave espacial moviéndose hacia usted mientras maneja?



Figura PC17.5

7. Los sistemas de radar empleados por la policía para detectar reductores de velocidad son sensibles al corrimiento Doppler de un pulso de microondas. Analice cómo esta sensibilidad puede utilizarse para medir la rapidez de un auto.
8. *El evento Tunguska*. El 30 de junio de 1908 un meteoro se quemó y explotó en la atmósfera sobre el valle del río Tunguska, en Siberia. Derribó árboles en miles de kilómetros cuadrados e inició un incendio forestal, pero no produjo cráter y aparentemente no causó pérdidas humanas. Un testigo sentado en su pórtico afuera de la zona de los árboles caídos recordó los eventos en la siguiente secuencia. Él vio una luz moverse en el cielo, más brillante que el Sol, y descender en un ángulo bajo hacia el horizonte. Sintió que

su cara se calentaba. Que el suelo se sacudía. Un agente invisible lo levantó y de inmediato lo soltó aproximadamente un metro más lejos de donde había estado sentado. Escuchó un retumbar prolongado muy fuerte. Sugiera una explicación para estas observaciones y para el orden en el que ocurrieron.

9. Un vigilante sónico es un dispositivo que determina la distancia a un objeto al enviar un pulso sonoro ultrasónico y medir el intervalo de tiempo requerido para que la onda regrese por reflexión desde el objeto. Por lo general, estos dispositivos no pueden detectar confiablemente un objeto que esté a menos de medio metro del sensor. ¿Por qué es así?

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: En este capítulo, las variaciones de presión ΔP se miden respecto a la presión atmosférica, 1.013×10^5 Pa.

Sección 17.1 Variaciones de presión en ondas sonoras

1. Una onda sonora sinusoidal se mueve a través de un medio y se describe mediante la función de onda de desplazamiento

$$s(x, t) = 2.00 \cos(15.7x - 858t)$$

donde s está en micrómetros, x en metros y t en segundos. Encuentre (a) la amplitud, (b) la longitud de onda y (c) la rapidez de esta onda. (d) Determine el desplazamiento instantáneo del equilibrio de los elementos del medio en la posición $x = 0.050$ m en $t = 3.00$ ms. (e) Determine la rapidez máxima del movimiento oscilatorio del elemento.

2. A medida que cierta onda sonora viaja a través del aire produce variaciones de presión (arriba y debajo de la presión atmosférica) dadas por $\Delta P = 1.27 \sin(px - 340\pi t)$ en unidades SI. Encuentre (a) la amplitud de las variaciones de presión, (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda en el aire y (d) la rapidez de la onda sonora.
3. Escriba una expresión que describa la variación de presión como función de la posición y el tiempo para una onda sonora sinusoidal en aire. Suponga que la rapidez del sonido es 343 m/s, $\lambda = 0.100$ m y $\Delta P_{\text{máx}} = 0.200$ Pa.

Sección 17.2 Rapidez de ondas sonoras

El problema 85 del capítulo 2 también puede asignarse a esta sección.

Nota: En lo que resta de este capítulo, a menos que se especifiquen otras indicaciones, la densidad de equilibrio del aire es $\rho = 1.20$ kg/m³ y la rapidez del sonido en aire es $v = 343$ m/s. Utilice la tabla 17.1 para encontrar la rapidez del sonido en otros medios.

4. Un experimentador quiere generar en aire una onda sonora que tenga una amplitud de desplazamiento de 5.50×10^{-6} m. La amplitud de presión estará limitada a 0.840

Pa. ¿Cuál es la longitud de onda mínima que puede tener la onda sonora?

5. Calcule la amplitud de presión de una onda sonora de 2.00 kHz en aire; suponiendo que la amplitud de desplazamiento es igual a 2.00×10^{-8} m.
6. Los terremotos en líneas de falla en la corteza terrestre crean ondas sísmicas, las cuales son longitudinales (ondas P) o transversales (ondas S). Las ondas P tienen una rapidez de aproximadamente 7 km/s. Estime el módulo volumétrico promedio de la corteza terrestre, dado que la densidad de la roca es alrededor de 2 500 kg/m³.
7. Un delfín (figura P17.7) en agua de mar a una temperatura de 25°C emite una onda sonora dirigida hacia el lecho marino a 150 m de profundidad. ¿Qué tiempo transcurre hasta la llegada del eco?



Stephen Frink/Photographer's Choice/Getty Images

Figura P17.7

8. Una onda sonora se propaga en aire a 27°C con frecuencia de 4.00 kHz. Pasa a través de una región donde la temperatura cambia gradualmente y luego se mueve a través de aire a 0°C. Dé respuestas numéricas a las siguientes preguntas en la medida de lo posible y establezca su razonamiento sobre lo que sucede físicamente con la onda. (a) ¿Qué ocurre con la rapidez de la onda? (b) ¿Qué sucede con su frecuencia? (c) ¿Qué ocurre con su longitud de onda?
9. El ultrasonido se usa en medicina tanto para imagen diagnóstica (figura P17.9, página 526) como para terapia. Para

diagnosis, pulsos cortos de ultrasonido pasan a través del cuerpo del paciente. Se registra un eco reflejado de una estructura de interés y es posible determinar la distancia a la estructura mediante el retraso de tiempo para el retorno del eco. Para revelar detalles, la longitud de onda del ultrasonido reflejado debe ser pequeña comparada con el tamaño del objeto que refleja la onda. La rapidez del ultrasonido en el tejido humano es de aproximadamente 1 500 m/s (casi la misma que la rapidez del sonido en el agua). (a) ¿Cuál es la longitud de onda del ultrasonido con una frecuencia de 2.40 MHz? (b) En todo el conjunto de técnicas de formación de imagen se utilizan frecuencias en el rango de 1.00 a 20.0 MHz. ¿Cuál es el rango de longitudes de onda que corresponden a este intervalo de frecuencias?



Figura P17.9 Imagen de un feto en el útero realizada mediante ultrasonido.

10. Una onda sonora en el aire tiene una amplitud de presión igual a 4.00×10^{-3} Pa. Calcule la amplitud de desplazamiento de la onda a una frecuencia de 10.0 kHz.
11. Suponga que escucha un trueno 16.2 s después de ver el relámpago asociado. La rapidez de la luz en el aire es 3.00×10^8 m/s. (a) ¿Qué tan lejos está del relámpago? (b) ¿Para responder necesita conocer el valor de la rapidez de la luz? Explique.
12. Un avión de rescate vuela horizontalmente con rapidez constante en busca de un bote averiado. Cuando el avión está directamente arriba del bote, la tripulación del bote suena una gran sirena. Cuando el detector sonoro del avión recibe el sonido de la sirena, el avión ya recorrió una distancia igual a la mitad de su altura sobre el océano. Si supone que el sonido tarda 2.00 s en llegar al avión, determine (a) la rapidez del avión y (b) su altura.

13. Una maceta es derribada desde un balcón a una altura $d = 20.0$ m sobre la acera, como se muestra en la figura P17.13. Cae hacia un con fiado hombre de altura $h = 1.75$ m que está de pie abajo. Suponga que el hombre requiere un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.300$ s para responder a la advertencia. ¿Qué tan cerca de la acera puede caer la maceta antes de que sea demasiado tarde para que un grito de advertencia desde el balcón llegue a tiempo al hombre?

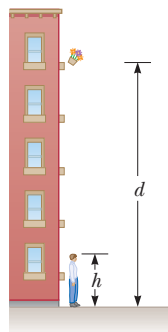


Figura P17.13
Problemas 13 y 14.

14. Una maceta es derribada desde un balcón a una altura d sobre la acera, como se muestra en la figura P17.13. Cae hacia un con fiado hombre de altura h que está de pie abajo. Suponga que el hombre requiere un intervalo de tiempo Δt para responder a la advertencia. ¿Qué tan cerca de la acera puede caer la maceta antes de que sea demasiado tarde para que un grito de advertencia desde el balcón llegue a tiempo al hombre?
15. La rapidez del sonido en el aire (en metros por segundo) depende de la temperatura, de acuerdo con la expresión aproximada

$$v = 331.5 + 0.607T_C$$

donde T_C es la temperatura Celsius. En aire seco, la temperatura disminuye casi 1°C por cada 150 m de aumento en altura. (a) Suponga que este cambio es constante hasta una altura de 9 000 m. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que el sonido de un avión que vuela a 9 000 m llegue al suelo en un día cuando la temperatura del suelo es de 30°C ? (b) ¿Qué pasaría si? Compare su respuesta con el intervalo de tiempo requerido si el aire estuviese uniformemente a 30°C . ¿Qué intervalo de tiempo es más largo?

16. Una onda sonora se mueve en un cilindro, como en la figura 17.2. Demuestre que la variación de la presión de la onda es descrita por $\Delta P = \pm \rho v \omega \sqrt{s_{\text{máx}}^2 - s^2}$, donde $s = s(x, t)$ está dada por la ecuación 17.1.
17. Un martillo golpea un extremo de una gruesa barra de hierro de longitud 8.50 m. Un micrófono ubicado en el extremo opuesto detecta dos pulsos de sonido, uno que viaja a través del aire y una onda longitudinal que viaja por la barra. (a) ¿Cuál pulso llega primero al micrófono? (b) Encuentre la separación, en tiempo, entre las llegadas de los dos pulsos.
18. Un vaquero está de pie sobre suelo horizontal entre dos riscos verticales paralelos. No está a la mitad entre los riscos. Dispara un tiro y escucha su eco. El segundo eco llega 1.92 s después que el primero y 1.47 s antes que el tercero. Sólo considere el sonido que viaja paralelo al suelo y se refleja de los riscos. (a) ¿Cuál es la distancia entre los riscos? (b) ¿Qué pasaría si? Si él puede escuchar un cuarto eco, ¿en cuánto tiempo llega después del tercer eco?

Sección 17.3 Intensidad de ondas sonoras periódicas

19. Calcule el nivel sonoro (en decibeles) de una onda sonora que tiene una intensidad de $4.00 \mu\text{W}/\text{m}^2$.
20. El área típica de un tímpano es casi $5.00 \times 10^{-5} \text{ m}^2$. (a) Calcule la potencia sonora promedio incidente sobre un tímpano en el umbral de dolor, el cual corresponde a una intensidad de $1.00 \text{ W}/\text{m}^2$. (b) ¿Cuánta energía se transfiere al tímpano expuesto a este sonido durante 1.00 min?
21. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a 1.00 kHz es de $0.600 \text{ W}/\text{m}^2$. (a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a 2.50 kHz mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0.500 kHz y se duplica la amplitud de desplazamiento.

22. La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a una frecuencia f es I . (a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a f' mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a $f/2$ y se duplica la amplitud de desplazamiento.
23. Una persona emplea un dispositivo auditivo que aumenta uniformemente en 30 dB el nivel sonoro de todas las frecuencias audibles de sonido. El dispositivo capta sonido a una frecuencia de 250 Hz a una intensidad de $3.0 \times 10^{-11} \text{ W/m}^2$. ¿Cuál es la intensidad aportada al tímpano?
24. La intensidad del sonido a una distancia de 16 m de un ruidoso generador es de 0.25 W/m^2 . ¿Cuál es la intensidad sonora a una distancia de 28 m del generador?
25. La potencia de salida de cierta bocina pública es de 6.00 W. Suponga que transmite por igual en todas direcciones. (a) ¿Desde la bocina a qué distancia el sonido sería doloroso al oído? (b) ¿A qué distancia desde la bocina el sonido sería apenas audible?
26. Una onda sonora de una sirena policiaca tiene una intensidad de 100.0 W/m^2 en un cierto punto; una segunda onda sonora proveniente de una ambulancia cercana tiene un nivel de intensidad que es 10 dB mayor que el de la onda sonora de la sirena policiaca en el mismo punto. ¿Cuál es el nivel sonoro de la onda sonora de la ambulancia?
27. Un tren suena su silbato al aproximarse a una intersección. El silbato puede ser escuchado justamente en un nivel sonoro de 50 dB por un observador a 10 km de distancia. (a) ¿Cuál es la potencia promedio generada por el silbato? (b) ¿Qué nivel de intensidad del sonido del silbato es observado por alguien en la intersección a 50 m del tren? Trate al silbato como una fuente puntual y desprecie cualquier absorción de sonido por el aire.
28. Mientras la gente canta en la iglesia, el nivel sonoro en todas partes en el interior es de 101 dB. Ningún sonido se transmite a través de las grandes paredes, pero todas las ventanas y puertas están abiertas una mañana de verano. Su área total es de 22.0 m^2 . (a) ¿Cuánta energía sonora es radiada a través de las ventanas y puertas en 20.0 min? (b) Suponga que el suelo es un buen reflector y que el sonido radia, desde la iglesia, uniformemente en todas las direcciones horizontales y verticales hacia arriba. Encuentre el nivel sonoro a 1.00 km de distancia.
29. La melodía vocal más excelsa está en la Misa en Si Menor de Johann Sebastian Bach. En una sección, los bajos, tenores, altos y sopranos llevan la melodía de Do bajo a La alto. En tono de concierto, a estas notas ahora se les asignan frecuencias de 146.8 Hz y 880.0 Hz. Encuentre las longitudes de onda de (a) la nota inicial y (b) la nota final. Suponga que el coro canta la melodía con un nivel sonoro uniforme de 75.0 dB. Determine las amplitudes de presión de (c) la nota inicial y (d) la nota final. Encuentre las amplitudes de desplazamiento de (e) la nota inicial y (f) la nota final.
30. Demuestre que la diferencia entre los niveles de decibeles β_1 y β_2 de un sonido se relaciona con la razón de las distancias r_1 y r_2 desde la fuente de sonido mediante

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

31. En un estadio cerrado se realiza un espectáculo familiar en hielo. Los patinadores actúan con música a un nivel de 80.0 dB. Este nivel es muy alto para su bebé, quien llora a 75.0 dB. (a) ¿Qué intensidad sonora total absorbe usted? (b) ¿Cuál es el nivel sonoro combinado?
32. Dos bocinas pequeñas emiten ondas sonoras de diferentes frecuencias por igual en todas direcciones. La bocina A tiene una salida de 1.00 mW y la bocina B tiene una salida de 1.50 mW. Determine el nivel sonoro (en decibeles) en el punto C de la figura P17.32, si supone que (a) sólo la bocina A emite sonido, (b) sólo la bocina B emite sonido y (c) ambas bocinas emiten sonido.

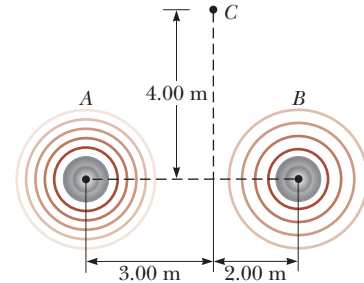


Figura P17.32

33. Una carga de explosivo se detona a muchos metros sobre el suelo. A una distancia $d_1 = 500 \text{ m}$ de la explosión la presión acústica alcanza un máximo de $\Delta P_{\text{máx}} = 10.0 \text{ Pa}$ (figura P17.33). Suponga que la rapidez del sonido es constante en 343 m/s a través de la atmósfera sobre la región considerada, que el suelo absorbe todo el sonido que cae en él y que el aire absorbe energía sonora, como se describe por la razón 7.00 dB/km. ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) a una distancia $d_2 = 4.00 \times 10^3 \text{ m}$ de la explosión?

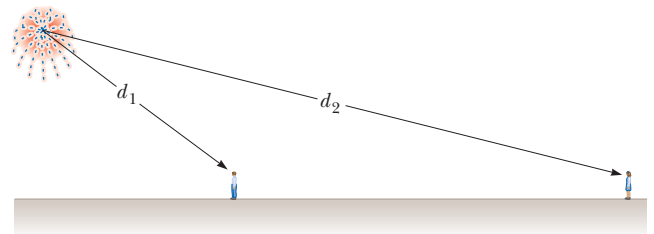


Figura P17.33

34. Un cohete explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador en el suelo, directamente debajo de la explosión, experimenta una intensidad sonora promedio de $7.00 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$ durante 0.200 s. (a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? (b) ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) que escucha el observador?
35. El nivel sonoro a una distancia de 3.00 m de una fuente es 120 dB. ¿A qué distancia el nivel sonoro es de (a) 100 dB y (b) 10.0 dB?
36. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Temprano, un sábado en la mañana, y para su desagrado, su vecino adyacente decide cortar el césped. Cuando usted intenta dormir, su vecino del otro lado también comienza a cortar el césped con una podadora idéntica; ambos vecinos están a la misma distancia de usted. Esta situación le es

muy molesta, porque ahora el sonido total tiene el doble de sonoridad que cuando sólo un vecino corta el césped.

Sección 17.4 El efecto Doppler

37. Una ambulancia que se mueve a 42 m/s suena su sirena, cuya frecuencia es 450 Hz. Un auto se mueve en la misma dirección que la ambulancia a 25 m/s. ¿Qué frecuencia escucha una persona en el auto (a) cuando la ambulancia se aproxima al auto, y (b) después que la ambulancia pasa al auto?

38. Cuando partículas cargadas de alta energía se mueven a través de un medio transparente con una rapidez mayor que la rapidez de la luz en dicho medio se produce una onda de choque, u onda de proa, de luz. Este fenómeno se llama *efecto Cerenkov*. Cuando un reactor nuclear se blindo mediante una gran alberca de agua, la radiación Cerenkov puede verse como un brillo azul en la vecindad del núcleo del reactor debido a electrones de alta rapidez moviéndose a través del agua (figura 17.38). En un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de onda con un semiángulo de vértice de 53.0° . Calcule la rapidez de los electrones en el agua. La rapidez de la luz en el agua es 2.25×10^8 m/s.

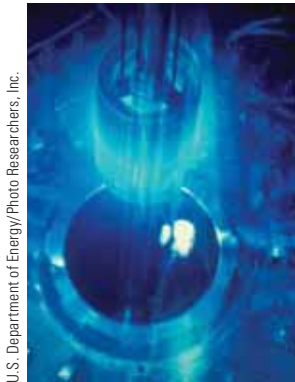


Figura P17.38

39. Un conductor viaja hacia el Norte sobre una autopista con una rapidez de 25.0 m/s. Una patrulla de caminos que viaja hacia el Sur con una rapidez de 40.0 m/s, se aproxima con su sirena funcionando a una frecuencia de 2 500 Hz. (a) ¿Qué frecuencia percibe el conductor mientras se aproxima la patrulla? (b) ¿Qué frecuencia detecta el conductor después que lo rebasa la patrulla? (c) Repita los incisos (a) y (b) para cuando la patrulla viaja hacia el Norte.
40. El submarino A viaja horizontalmente a 11.0 m/s a través del agua en el océano. Emite una señal de sonar de frecuencia $f = 5.27 \times 10^3$ Hz en la dirección hacia adelante. El submarino B está enfrente del submarino A y viaja a 3.00 m/s, respecto al agua, en la misma dirección que el submarino A. Un tripulante en el submarino B utiliza su equipo para detectar las ondas sonoras ("sonidos metálicos") del submarino A. Se desea determinar qué escucha el tripulante en el submarino B. (a) Un observador sobre qué submarino detecta una frecuencia f' como descrita por la ecuación 17.19? (b) En la ecuación 17.19, ¿el signo de v_s es positivo o negativo? (c) En la ecuación 17.19, ¿el signo de v_o es positivo o negativo? (d) En la ecuación 17.19, ¿qué rapidez de sonido debería emplearse? (e) Encuentre la frecuencia del sonido detectada por el tripulante en el submarino B.

41. **Problema de repaso.** Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte $k = 20.0$ N/m y oscila, como se muestra en la figura P17.41. La masa total del bloque y la bocina es de 5.00 kg, y la amplitud de movimiento de esta unidad es

0.500 m. La bocina emite ondas sonoras de frecuencia 440 Hz. Determine (a) la frecuencia más alta y (b) la frecuencia más baja escuchadas por la persona a la derecha de la bocina. (c) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es 60.0 dB cuando está más cerca de la bocina a una distancia $d = 1.00$ m, ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador?

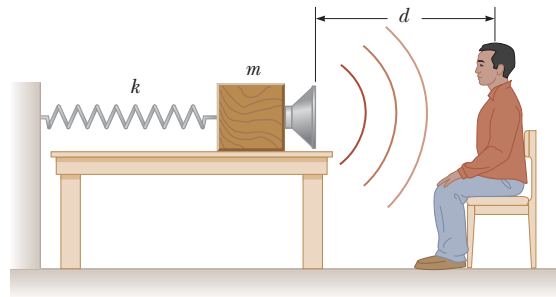


Figura P17.41 Problemas 41 y 42.

42. **Problema de repaso.** Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte k y oscila, como se muestra en la figura P17.41. La masa total del bloque y la bocina es m , y la amplitud de movimiento de esta unidad es A . La bocina emite ondas sonoras de frecuencia f . Determine (a) la frecuencia más alta y (b) la frecuencia más baja escuchadas por la persona a la derecha de la bocina. (c) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es β cuando está más cerca de la bocina a una distancia d , ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador?
43. Unos padres expectantes están emocionados por escuchar el latido cardíaco de su bebé nonato, revelado por un detector ultrasónico que produce sonidos audibles en sincronización con el latido fetal. Suponga que la pared ventricular del feto realiza movimiento armónico simple con una amplitud de 1.80 mm y una frecuencia de 115 latidos por minuto. (a) Encuentre la rapidez máxima lineal de la pared cardíaca. Suponga que una fuente montada sobre el detector en contacto con el abdomen de la madre produce sonido a 2 000 000.0 Hz que viaja a través del tejido a 1.50 km/s. (b) Encuentre el máximo cambio en frecuencia entre el sonido que llega a la pared ventricular y el sonido emitido por la fuente. (c) Determine el máximo cambio en frecuencia entre el sonido reflejado recibido por el detector y el emitido por la fuente.
44. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? En los Juegos Olímpicos de Verano, una atleta corre con rapidez constante en línea recta mientras que un espectador cerca del extremo de la pista toca una nota con el silbato de frecuencia fija. Cuando la atleta rebasa el silbato, ella escucha que cae la frecuencia del silbato a la tercera menor. Es decir, la frecuencia que ella capta disminuye a cinco sextos de su valor original.

45. De pie en un cruce usted escucha una frecuencia de 560 Hz de la sirena de una ambulancia que se aproxima. Después que la ambulancia pasa, la frecuencia observada de la sirena es 480 Hz. Determine la rapidez de la ambulancia a partir de estas observaciones.

46. **Problema de repaso.** Un diapasón que vibra a 512 Hz cae desde el reposo y acelera a 9.80 m/s^2 . ¿Qué tan abajo del punto de liberación se encuentra el diapasón cuando ondas de 485 Hz de frecuencia llegan al punto de liberación?
47. Un avión supersónico que viaja a Mach 3.00 a una altura de $h = 20\,000 \text{ m}$ está directamente arriba de una persona en el tiempo $t = 0$, como se muestra en la figura P17.47. Suponga que la rapidez promedio del sonido en aire es 335 m/s a lo largo de la trayectoria del sonido. (a) ¿En qué tiempo la persona encontrará la onda de choque debida al sonido emitido en $t = 0$? (b) ¿Dónde estará el avión cuando se escuche esta onda de choque?

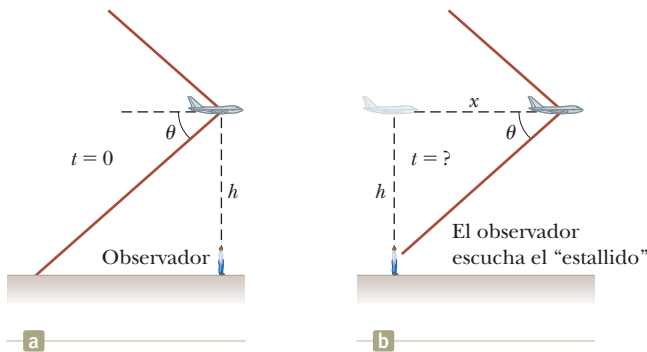


Figura P17.47

Problemas adicionales

48. Un murciélago (figura P17.48) puede detectar objetos muy pequeños, como un insecto cuya longitud es aproximadamente igual a una longitud de onda del sonido que el murciélago emite. Si un murciélago genera un chillido a una frecuencia de 60.0 kHz y la rapidez del sonido en aire es 340 m/s , ¿cuál es el insecto más pequeño que el murciélago puede detectar?



Hugh Lansdown/Shutterstock.com

Figura P17.48

49. Algunos estudios sugieren que el límite superior de frecuencia de audición está determinado por el diámetro del tímpano. El diámetro del tímpano es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de onda de la onda sonora en este límite superior. Si esta relación es válida exactamente, ¿cuál es el diámetro del tímpano de una persona capaz de escuchar $20\,000 \text{ Hz}$? (Suponga una temperatura corporal de 37.0°C .)
50. La nota más alta escrita para un cantante en una fuente publicada fue el Fa sostenido sobre Do alto, 1.480 kHz , para Zerbinetta en la versión original de la ópera de Richard Strauss *Ariadne auf Naxos*. (a) Encuentre la longitud de onda de este sonido en aire. (b) Suponga que las personas en la cuarta fila de asientos escuchan esta nota con un nivel de 81.0 dB . Encuentre la amplitud de despla-

zamiento del sonido. (c) ¿Qué pasaría si? En respuesta a las quejas, Strauss transpuso la nota más baja a Fa sobre Do alto, 1.397 kHz . ¿En qué incremento cambió la longitud de onda?

51. Camiones que llevan basura al depósito municipal forman una procesión casi estable en un camino vecinal y todos viajan a 19.7 m/s en la misma dirección. Dos camiones llegan al depósito cada 3 min. Un ciclista también viaja hacia el depósito a 4.47 m/s . (a) ¿Con qué frecuencia los camiones pasan al ciclista? (b) ¿Qué pasaría si? Una colina no frena a los camiones, pero el ciclista fuera de forma sí baja su rapidez a 1.56 m/s . ¿Con qué frecuencia los camiones pasan zumbando ahora al ciclista?
52. Si un vendedor afirma que una bocina le da 150 W , él se refiere a la entrada de potencia eléctrica máxima a la bocina. Suponga que una bocina con una potencia de entrada de 150 W produce sonido con un nivel de 103 dB a una distancia de 1.60 m desde su centro. (a) Encuentre su potencia sonora de salida. (b) Determine la eficiencia de la bocina, es decir, la fracción de potencia de entrada que se convierte en potencia de salida útil.
53. Una autopista interestatal se construyó a través de un vecindario en una ciudad. En la tarde, el nivel sonoro en un departamento en el vecindario es 80.0 dB cuando 100 autos pasan afuera de la ventana cada minuto. En la madrugada, el flujo de tráfico es sólo de cinco autos por minuto. ¿Cuál es el nivel sonoro promedio en la madrugada?
54. El silbato de un tren ($f = 400 \text{ Hz}$) suena más alto o más bajo en frecuencia, dependiendo de si se aproxima o se aleja. (a) Demuestre que la diferencia en frecuencia del silbato, si se acerca o se aleja, es

$$\Delta f = \frac{2u/v}{1 - u^2/v^2} f$$

donde u es la rapidez del tren y v es la rapidez del sonido. (b) Calcule esta diferencia para un tren moviéndose con una rapidez de 130 km/h . Considere que la rapidez del sonido en aire es 340 m/s .

55. Una cinta ultrasónica para medir utiliza frecuencias arriba de 20 MHz para determinar dimensiones de estructuras como edificios. Hace la medición al emitir un pulso de ultrasonido en el aire y después mide el intervalo de tiempo para que retorne el eco desde una superficie reflectora cuya distancia es el objetivo a determinar. La distancia se exhibe como una lectura digital. Para una cinta ultrasónica que emite un pulso de ultrasonido con una frecuencia de 22.0 MHz , (a) ¿cuál es la distancia a un objeto desde el cual el eco retorna después de 24.0 ms cuando la temperatura del aire es 26°C ? (b) ¿Cuál debería ser la duración del pulso emitido si debe incluir diez ciclos de la onda ultrasónica? (c) ¿Cuál es la longitud espacial de tal pulso?
56. El esfuerzo de tensión en una gruesa barra de cobre es 99.5% de su punto de rompimiento elástico de $13.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. Si una onda sonora de 500 Hz es transmitida a través del material, (a) ¿qué amplitud de desplazamiento hará que se rompa la barra? (b) ¿Cuál es la máxima rapidez de los elementos de cobre en este momento? (c) ¿Cuál es la intensidad sonora en la barra?

- 57. Problema de repaso.** Un deslizador de 150 g se mueve a $v_1 = 2.30$ m/s sobre un riel de aire hacia un deslizador de 200 g originalmente estacionario, como se muestra en la figura P17.57. Los deslizadores experimentan una colisión completamente inelástica y quedan unidos durante un intervalo de tiempo de 7.00 ms. Un estudiante sugiere que aproximadamente la mitad de la energía mecánica perdida del sistema de dos deslizadores se transfiere al ambiente en forma de sonido. ¿Esta sugerencia es razonable? Para evaluar la idea, encuentre el nivel sonoro implicado en una posición a 0.800 m de los deslizadores. Si la idea del estudiante no es razonable, sugiera una mejor idea.

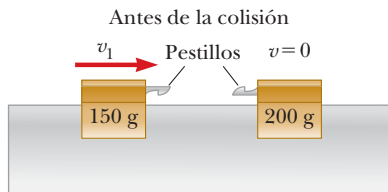


Figura P17.57

- 58.** Considere la siguiente función de onda en unidades SI:

$$\Delta P(r, t) = \left(\frac{25.0}{r} \right) \sin(1.36r - 2030t)$$

Explique cómo esta función de onda puede aplicarse a una onda que radia desde una fuente pequeña, con r como la distancia radial desde el centro de la fuente hasta cualquier punto afuera de la fuente. Dé la descripción más detallada que pueda de la onda. Incluya respuestas a preguntas como las siguientes y dé valores representativos para cualesquiera cantidades que puedan ser evaluadas. (a) ¿La onda se mueve más hacia la derecha o la izquierda? (b) Mientras se aleja de la fuente, ¿qué sucede con su amplitud? (c) ¿su rapidez? (d) ¿su frecuencia? (e) ¿su longitud de onda? (f) ¿su potencia? (g) ¿su intensidad?

- 59. Problema de repaso.** Para un cierto tipo de acero, el esfuerzo siempre es proporcional a la deformación con módulo de Young 20×10^{10} N/m². El acero tiene densidad 7.86×10^3 kg/m³. Quedará permanentemente doblado si se somete a un esfuerzo compresivo mayor que su límite elástico $\sigma_y = 400$ MPa. Una barra de 80.0 cm de largo, hecha de este acero, se dispara a 12.0 m/s directo a una pared muy dura. (a) La rapidez de una onda compresiva unidimensional móvil a lo largo de la barra está dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde Y es el módulo de Young para la barra y ρ es la densidad. Calcule esta rapidez. (b) Después que el extremo frontal de la barra golpea la pared y se detiene, el extremo posterior de la barra sigue en movimiento como es descrito por la primera ley de Newton hasta que se detiene por presión excesiva en una onda sonora móvil de regreso a través de la barra. ¿Qué intervalo de tiempo transcurre antes que el extremo posterior de la barra reciba el mensaje de que debe detenerse? (c) ¿Cuánto se movió el extremo posterior de la barra en este intervalo de tiempo? Encuentre (d) la deformación y (e) el esfuerzo en la barra. (f) Si no debe fallar, ¿cuál es la máxima rapidez de impacto que una barra puede tener, en términos de σ_y , Y y ρ ?

- 60.** Un gran conjunto de gradas de fútbol desocupadas tiene asientos sólidos y elevadores. Usted está de pie en el campo

enfrente de las gradas y aplaude bruscamente una vez con dos tableros de madera. El pulso sonoro que produce no tiene frecuencia ni longitud de onda definidas. El sonido que escucha reflejado de las gradas tiene una frecuencia identificable y puede recordarle una breve nota de trompeta, de un zumbador o flauta de un solo agujero. (a) Explique este sonido. Calcule una estimación del orden de magnitud para (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda y (d) la duración del sonido sobre la base de los datos que especifique.

- 61.** Para medir su rapidez, una paracaidista porta un zumbador que emite un tono estable a 1 800 Hz. Un amigo ubicado en el suelo en el sitio de aterrizaje directamente abajo escucha el sonido amplificado que recibe. Suponga que el aire está tranquilo y que la rapidez del sonido es independiente de la altitud. Mientras la paracaidista cae con rapidez terminal, su amigo en el suelo recibe ondas de frecuencia 2 150 Hz. (a) ¿Cuál es la rapidez de descenso de la paracaidista? (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que la paracaidista puede escuchar el sonido del zumbador reflejado del suelo. ¿Qué frecuencia recibe ella?

- 62.** Ondas esféricas con 45.0 cm de longitud de onda se propagan hacia fuera de una fuente puntual. (a) Explique cómo la intensidad a una distancia de 240 cm se compara con la intensidad a una distancia de 60.0 cm. (b) Explique cómo la amplitud a una distancia de 240 cm se compara con la amplitud a una distancia de 60.0 cm. (c) Explique cómo la fase de la onda a una distancia de 240 cm se compara con la fase a 60.0 cm en el mismo momento.

- 63.** Un murciélago (figura P17.48) que se mueve a 5.00 m/s persigue a un insecto volador. Si el murciélago emite un chillido de 40.0 kHz y recibe de vuelta un eco a 40.4 kHz, (a) ¿cuál es la rapidez del insecto? (b) ¿El murciélago podrá capturar al insecto? Explique.

- 64.** Dos barcos se mueven a lo largo de una línea hacia el Este (figura P17.64). El buque trasero tiene una rapidez, relativa a un punto de observación con base en tierra, de $v_1 = 64.0$ km/h y el buque delantero tiene una rapidez de $v_2 = 45.0$ km/h relativa a ese punto. Los dos barcos están en una región del océano donde el movimiento de la corriente es uniforme hacia el Oeste a $v_{\text{corriente}} = 10.0$ km/h. El barco trasero transmite una señal de sonar a una frecuencia de 1 200 Hz a través del agua. ¿Qué frecuencia monitorea el barco delantero?



Figura P17.64

- 65.** Una patrulla viaja hacia el Este a 40.0 m/s a lo largo de un camino recto y rebasa a un automóvil delante de ella que se mueve al Este a 30.0 m/s. A la patrulla se le descompone la sirena, que se pega a 1 000 Hz. (a) ¿Cuál sería la longitud de onda en el aire del sonido de la sirena si la patrulla estuviera en reposo? (b) ¿Cuál es la longitud de onda enfrente de la patrulla? (c) ¿Cuál es detrás de la patrulla?

(d) ¿Cuál es la frecuencia que escucha el conductor que es perseguido?

66. La rapidez de una onda compresiva unidimensional que viaja a lo largo de una barra delgada de cobre es 3.56 km/s. En un extremo de la barra se da un golpe con un martillo. Un escucha en el otro extremo de la barra capta el sonido dos veces, transmitido a través del metal y a través del aire, con un intervalo de tiempo Δt entre los dos pulsos. (a) ¿Cuál sonido llega primero? (b) Encuentre la longitud de la barra como una función de Δt . (c) Determine la longitud de la barra si $\Delta t = 127$ ms. (d) Imagine que la barra de cobre se sustituye por otro material a través del cual la rapidez del sonido es v_r . ¿Cuál es la longitud de la barra en términos de t y v_r ? (e) ¿La respuesta al inciso (d) tiene un límite bien definido si la rapidez del sonido en la barra tiende a infinito? Explique su respuesta.

67. Un gran meteorito entra a la atmósfera de la Tierra con un rapidez de 20.0 km/s y no se frena significativamente antes de entrar al océano. (a) ¿Cuál es el ángulo de Mach de la onda de choque del meteorito en la atmósfera baja? (b) Si se supone que el meteorito sobrevive al impacto con la superficie del océano, ¿cuál es el ángulo de Mach (inicial) de la onda de choque que produce el meteorito en el agua?

68. Tres barras metálicas se ubican entre sí como lo muestra la figura P17.68, donde $L_3 = L_1 + L_2$. La rapidez del sonido en una barra está dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, donde Y es el módulo de Young para la barra y ρ es la densidad. Los valores de densidad y módulo de Young para los tres materiales son $\rho_1 = 2.70 \times 10^3$ kg/m³, $Y_1 = 7.00 \times 10^{10}$ N/m², $\rho_2 = 11.3 \times 10^3$ kg/m³, $Y_2 = 1.60 \times 10^{10}$ N/m², $\rho_3 = 8.80 \times 10^3$ kg/m³ y $Y_3 = 11.0 \times 10^{10}$ N/m². Si $L_3 = 1.50$ m, ¿cuánto debe ser la razón L_1/L_2 si una onda sonora viaja la longitud de las barras 1 y 2 en el mismo intervalo de tiempo requerido para que la onda viaje la longitud de la barra 3?

69. Con métodos experimentales particulares es posible producir y observar en una larga barra delgada tanto una onda transversal, cuya rapidez depende principalmente de la tensión en la barra, como una onda longitudinal, cuya rapidez está determinada por el módulo de Young y la densidad del material de acuerdo con la expresión $v = \sqrt{Y/\rho}$. La onda transversal se puede modelar como una onda en una cuerda estirada. Una barra metálica particular tiene 150 cm de largo y un radio de 0.200 cm y una masa de 50.9 g. El módulo de Young para el material es 6.80×10^{10} N/m². ¿Cuál debe ser la tensión en la barra si la razón de la rapidez de las ondas longitudinales a la rapidez de las ondas transversales es 8.00?

70. Una sirena montada en el techo de una estación de bomberos emite sonido con una frecuencia de 900 Hz. Un viento estable sopla con una rapidez de 15.0 m/s. Si considera que la rapidez del sonido en aire tranquilo es de 343 m/s, encuentre la longitud de onda del sonido (a) de la sirena a favor del viento y (b) de la sirena contra el viento. Los bomberos se aproximan a la sirena desde diferentes direcciones a 15.0 m/s. ¿Qué frecuencia escucha un bombero

(c) si se aproxima desde una posición a favor del viento, de modo que se mueve en la dirección en que el viento sopla, y (d) si se aproxima desde una posición contraria al viento?

Problemas de desafío

71. La ecuación Doppler que se presentó en el texto es válida cuando el movimiento entre el observador y la fuente se presenta en línea recta, de modo que la fuente y el observador se mueven directamente uno hacia el otro o directamente uno alejándose del otro. Si esta restricción se relaja, uno debe usar la ecuación Doppler más general

$$f' = \left(\frac{v + v_o \cos \theta_o}{v - v_s \cos \theta_s} \right) f$$

donde θ_o y θ_s se definen en la figura P17.71a. Use la ecuación precedente para resolver el siguiente problema. Un tren se mueve con una rapidez constante de $v = 25.0$ m/s hacia la intersección que se muestra en la figura P17.71b. Un automóvil se detiene cerca del cruce, a 30.0 m de las vías. Si el silbato del tren emite una frecuencia de 500 Hz cuando el tren está a 40.0 m de la intersección. (a) ¿Cuál es la frecuencia que escuchan los pasajeros en el automóvil? (b) Si el tren emite este sonido continuamente y el auto está estable en esta posición antes de que el tren llegue y hasta que el tren se aleja, ¿qué rango de frecuencias escuchan los pasajeros en el automóvil? (c) Suponga que el auto tontamente quiere ganar el paso al tren en la intersección y que viaja a 40.0 m/s hacia las vías. Cuando el automóvil está a 30.0 m de las vías y el tren está a 40.0 m de la intersección, ¿cuál es la frecuencia que ahora escuchan los pasajeros en el auto?

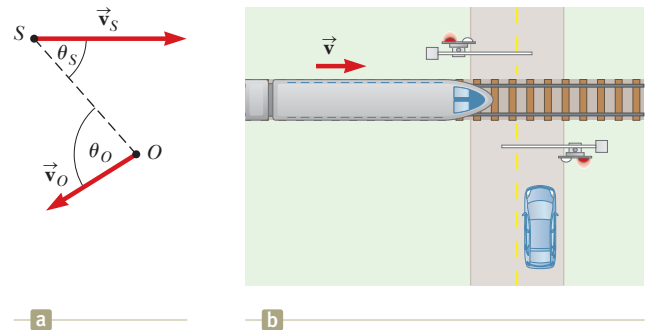


Figura P17.71

72. En la sección 17.2 se dedujo la rapidez del sonido en un gas mediante el teorema impulso-momento aplicado al cilindro de gas en la figura 17.5. Ahora se encontrará la rapidez del sonido en un gas empleando un distinto enfoque basado en el elemento de gas en la figura 17.3. Proceda como sigue. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para este elemento que muestre las fuerzas ejercidas sobre las superficies izquierda y derecha debidas a la presión del gas sobre cualquier lado del elemento. (b) Aplique la segunda ley de Newton al elemento para demostrar que

$$-\frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} A \Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

(c) Sustituya $\Delta P = -(B \partial s / \partial x)$ (ecuación 17.3) y obtenga la siguiente ecuación de onda para el sonido

$$\frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

(d) Para un físico matemático esta ecuación demuestra la existencia de ondas sonoras y determina su rapidez. Como estudiante de física usted debe dar otro paso o dos. Sustituya en la ecuación de onda la solución de prueba $s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$. Demuestre que esta función satisface la ecuación de onda, siempre que $\omega/k = v = \sqrt{B/\rho}$.

- 73.** La ecuación 17.13 afirma que a una distancia r de una fuente puntual con potencia $(Potencia)_{\text{prom}}$, la intensidad de onda es

$$I = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{4\pi r^2}$$

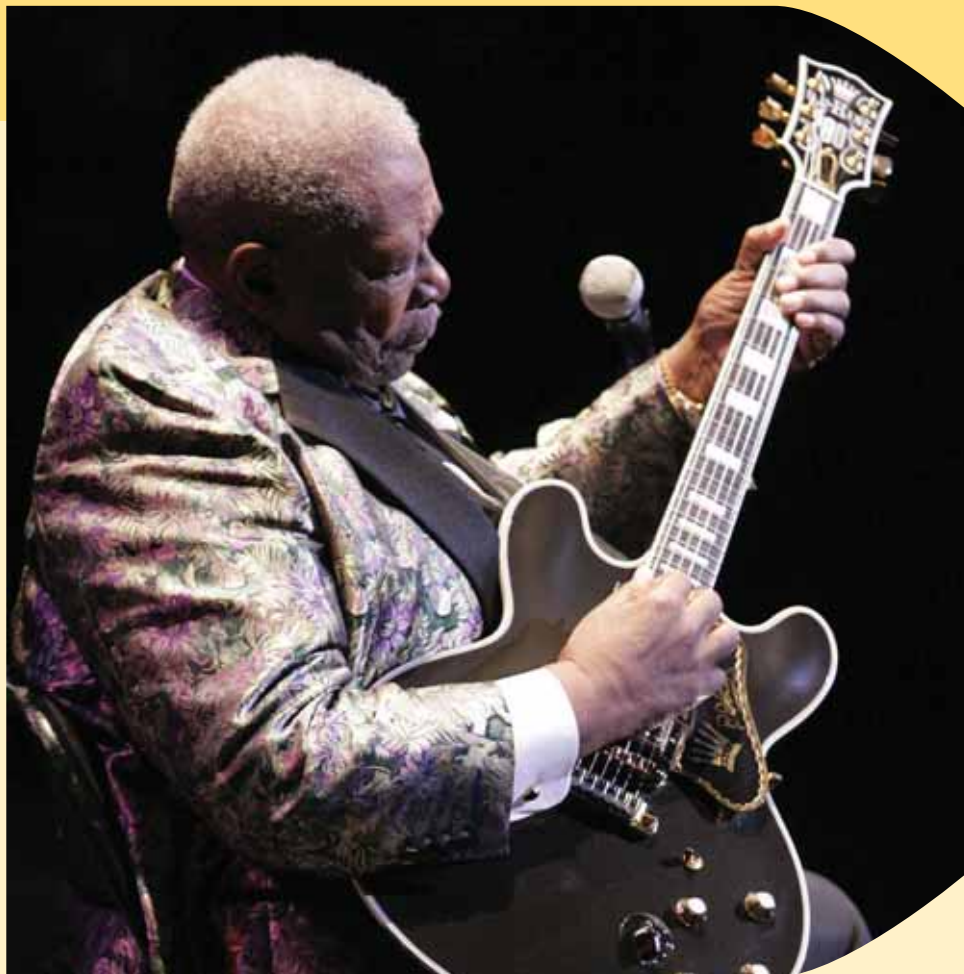
Estudie la figura 17.10 y demuestre que a una distancia r justo enfrente de una fuente puntual con potencia $(Potencia)_{\text{prom}}$ que se mueve con rapidez constante v_s , la intensidad de onda es

$$I = \frac{(Potencia)_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \left(\frac{v - v_s}{v} \right)$$

Sobreposición y ondas estacionarias

CAPÍTULO

18



- 18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia
- 18.2 Ondas estacionarias
- 18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera
- 18.4 Resonancia
- 18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire
- 18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas
- 18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo
- 18.8 Patrones de onda no sinusoidales

El modelo ondulatorio se introdujo en los dos capítulos anteriores. Se vio que las ondas son muy diferentes de las partículas. Una partícula es de tamaño cero, mientras que una onda tiene un tamaño característico, su longitud de onda. Otra diferencia importante entre ondas y partículas es que se puede explorar la posibilidad de dos o más ondas combinadas en un punto en el mismo medio. Las partículas se combinan para formar objetos extendidos, pero las partículas deben estar en *diferentes* posiciones. En cambio, dos ondas pueden estar presentes en la misma posición. Las ramificaciones de esta posibilidad se exploran en este capítulo.

Cuando las ondas se combinan en sistemas con condiciones de frontera pueden existir sólo ciertas frecuencias permitidas y decimos que las frecuencias están *cuantizadas*. La cuantización es un concepto que está en el corazón de la mecánica cuántica, un tema que se tratará formalmente en el capítulo 40. Aquí se demuestra que el análisis de ondas bajo condiciones de frontera explica muchos de los fenómenos cuánticos. En este capítulo se usa la cuantización para comprender el comportamiento de la amplia variedad de instrumentos musicales que se basan en cuerdas y columnas de aire.

También se considera la combinación de ondas que tienen diferentes frecuencias. Cuando interfieren dos ondas sonoras que tienen casi la misma frecuencia, se escuchan variaciones

El maestro del blues, B. B. King, aprovecha las ondas estacionarias en cuerdas. Cambia a notas más altas en la guitarra presionando las cuerdas contra los trastes en el diapasón, acortando la longitud de las partes de las cuerdas que vibran. (AP Photo/Danny Moloshok)

en el volumen llamadas batimientos. Por último, se analiza cómo cualquier onda periódica no sinusoidal se puede describir como una suma de funciones seno y coseno.

18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia

Muchos fenómenos ondulatorios interesantes en la naturaleza no se pueden describir mediante una sola onda viajera. En vez de ello se debe analizar estos fenómenos en términos de una combinación de ondas viajeras. Como se señaló en la introducción, las ondas tienen una diferencia notable de las partículas, que consiste en que las ondas se pueden combinar en el *mismo* lugar en el espacio. Para analizar tales combinaciones de onda hacemos uso del **principio de sobreposición**:

Principio de sobreposición ►

Si dos o más ondas viajeras se mueven a través de un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales.

Las ondas que obedecen a este principio se llaman *ondas lineales* (vea la sección 16.6). En el caso de ondas mecánicas, las ondas lineales generalmente se caracterizan por tener las amplitudes mucho menores que sus longitudes de onda. Las ondas que violan el principio de sobreposición se llaman *ondas no lineales* y con frecuencia se caracterizan por grandes amplitudes. En este libro sólo se tratará con ondas lineales.

Una consecuencia del principio de la sobreposición es que dos ondas viajeras pueden pasar a través de la otra sin destruirse o alterarse. Por ejemplo, cuando se lanzan dos piedras en un estanque y golpean la superficie en diferentes lugares, las ondas circulares superficiales que se expanden desde dos ubicaciones simplemente pasan una sobre otra sin efecto permanente. El patrón complejo resultante se puede considerar como dos conjuntos independientes de círculos en expansión.

La figura 18.1 es una representación pictórica de la sobreposición de dos pulsos. La función de onda para el pulso móvil hacia la derecha es y_1 , y la función de onda para el pulso moviéndose hacia la izquierda es y_2 . Los pulsos tienen la misma rapidez pero diferentes formas, y el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos. Cuando las ondas se traslapan (figura 18.1b), la función de onda de la onda compleja resultante está dada por $y_1 + y_2$. Cuando las crestas de los pulsos coinciden (figura 18.1c), la onda resultante dada por $y_1 + y_2$ tiene una amplitud mayor que la de los pulsos individuales. Finalmente, los dos pulsos se separan y se continúan moviendo en sus direcciones originales (figura 18.1d). Advierta que las formas de pulso permanecen sin cambios después de la interacción, ¡como si los dos pulsos no se hubiesen encontrado!

La combinación de ondas separadas en la misma región del espacio para producir una onda resultante se denomina **interferencia**. Para los dos pulsos que se muestran en la figura 18.1, el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección y positiva para ambos pulsos, y el pulso resultante (creado cuando se sobreponen los pulsos individuales) presenta una amplitud mayor que la de cualquier pulso individual. Ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en la misma dirección, nos referimos a esta sobreposición como **interferencia constructiva**.

Ahora considere dos pulsos que viajan en direcciones opuestas en una cuerda tensa donde un pulso se invierte en relación con el otro, como se ilustra en la figura 18.2. Cuando estos pulsos se sobreponen, el pulso resultante está dado por $y_1 + y_2$, pero los valores de la función y_2 son negativos. Otra vez, los dos pulsos pasan uno a través del otro; sin embargo, ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en direcciones opuestas, nos referimos a su sobreposición como **interferencia destructiva**.

El principio de la sobreposición es el tema central del análisis de modelo llamado **ondas en interferencia**. En muchas situaciones, tanto en acústica como en óptica, las ondas se combinan de acuerdo con este principio y presentan fenómenos interesantes con aplicaciones prácticas.

Prevención de riesgos ocultos 18.1

¿Las ondas realmente interfieren? En el uso popular el término *interferir* implica que un agente afecta una situación en alguna forma, de modo que evita que algo ocurra. Por ejemplo, en el fútbol americano, *interferencia de pase* significa que un jugador defensivo afectó al receptor de modo que el receptor fue incapaz de atrapar el balón. Este uso es muy diferente del dado en física, donde las ondas pasan una a través de otra e interfieren, pero no se afectan mutuamente en forma alguna. En física, interferencia es similar al concepto de *combinación*, como se describe en este capítulo.

Interferencia constructiva ►

Interferencia destructiva ►

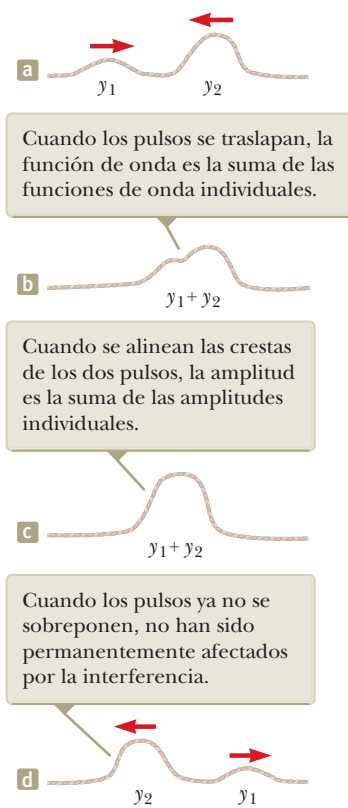


Figura 18.1 Interferencia constructiva. Dos pulsos positivos viajan sobre una cuerda estirada en direcciones opuestas y se traslapan.

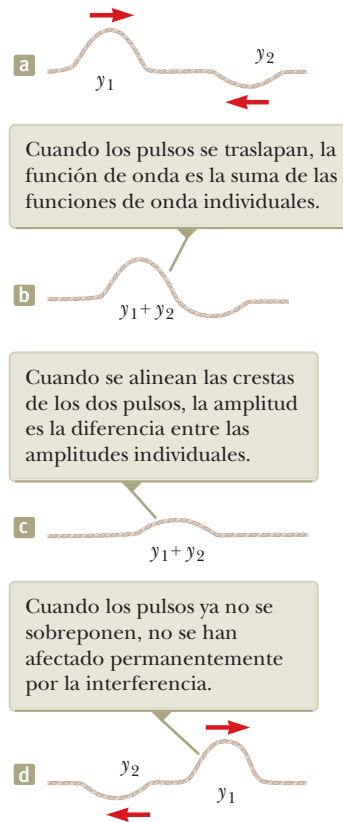


Figura 18.2 Interferencia destructiva. Dos pulsos, uno positivo y uno negativo, viajan sobre una cuerda estirada en direcciones opuestas y se traslapan.

Examen rápido 18.1 Dos pulsos se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda y son idénticos en forma, excepto que uno tiene desplazamientos positivos de los elementos de la cuerda y el otro tiene desplazamientos negativos. En el momento en que los dos pulsos se traslapan por completo en la cuerda, ¿qué sucede? (a) La energía asociada con los pulsos desaparece. (b) La cuerda no es móvil. (c) La cuerda forma una línea recta. (d) Los pulsos desaparecen y no reaparecerán.

Sobreposición de ondas sinusoidales

Ahora se aplicará el principio de sobreposición de dos ondas sinusoidales viajando en la misma dirección en un medio lineal. Si las dos ondas están viajando hacia la derecha y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, pero difieren en fase, podemos expresar sus funciones de onda individuales como

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

donde, como de costumbre, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$, y ϕ es la constante de fase, como se analizó en la sección 16.2. Por lo tanto, la función de onda resultante es

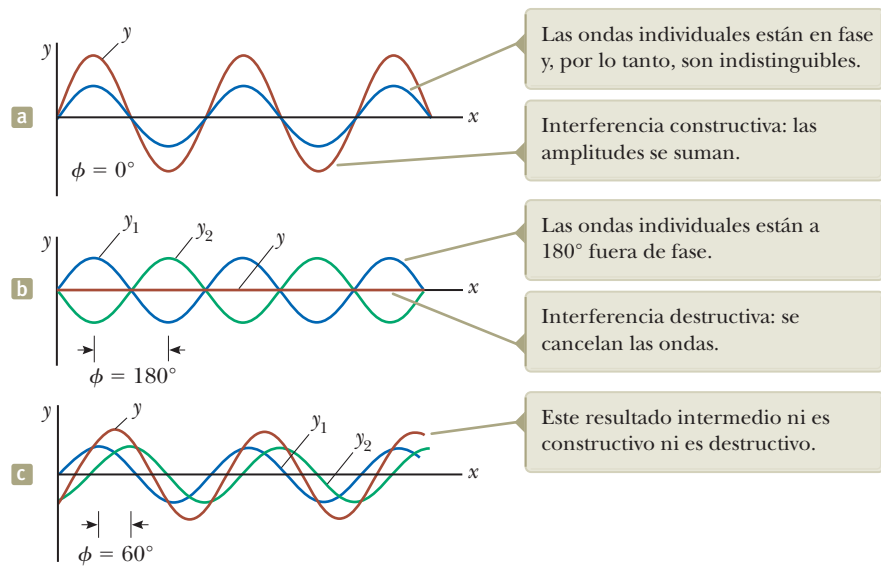
$$y = y_1 + y_2 = A [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

Para simplificar esta expresión, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Haciendo $a = kx - \omega t$ y $b = kx - \omega t + \phi$, encontramos que la función de onda resultante y se reduce a

Figura 18.3 La sobreposición de dos ondas idénticas y_1 y y_2 (azul y verde, respectivamente) para producir una onda resultante (café).



Resultante de dos ondas sinusoidales viajeras ▶

$$y = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Este resultado tiene varias características importantes. La función de onda resultante y también es sinusoidal y tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas individuales debido a que la función seno incorpora los mismos valores de k y ω que aparecen en las funciones de onda originales. La amplitud de la onda resultante es $2A \cos(\phi/2)$, y su constante de fase es $\phi/2$. Si la constante de fase ϕ de la onda original es igual a 0, entonces $\cos(\phi/2) = \cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es $2A$, dos veces la amplitud de cada onda individual. En este caso las crestas de las dos ondas están en las mismas ubicaciones en el espacio y se dice que las ondas están *en fase* en todas partes y, por lo tanto, interfieren constructivamente. Las ondas individuales y_1 y y_2 se combinan para formar la curva rojo marrón y de amplitud $2A$ que se muestra en la figura 18.3a. Puesto que las ondas individuales están en fase, son indistinguibles en la figura 18.3a, donde aparecen como una sola curva azul. En general, se produce interferencia constructiva cuando $\cos(\phi/2) = \pm 1$. Esto es cierto, por ejemplo, cuando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ rad, es decir, cuando ϕ es un múltiplo *par* de π .

Cuando ϕ es igual a π rad o cualquier múltiplo *impar* de π , entonces $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y las crestas de una onda se producen en las mismas posiciones que los valles de la segunda onda (figura 18.3b). Por lo tanto, como consecuencia de la interferencia destructiva la onda resultante tiene amplitud cero en todas partes, como se muestra con la línea recta rojo marrón en la figura 18.3b. Por último, cuando la constante de fase tiene un valor distinto de 0 o un múltiplo entero arbitrario de π rad (figura 18.3c), la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y $2A$.

En el caso más general, en el cual las ondas tienen la misma longitud de onda pero diferentes amplitudes, los resultados son similares con las siguientes excepciones. En el caso en fase, la amplitud de la onda resultante no es dos veces el de una sola onda, sino más bien es la suma de las amplitudes de las dos ondas. Cuando las ondas están π rad fuera de fase, no se cancelan completamente, como en la figura 18.3b. El resultado es una onda cuya amplitud es la diferencia entre las amplitudes de las ondas individuales.

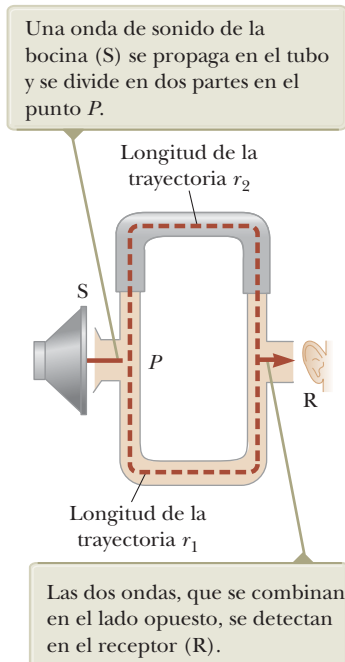


Figura 18.4 Un sistema acústico para la demostración de interferencia de ondas sonoras. Puede variar la trayectoria superior de longitud r_2 deslizando la parte superior.

Interferencia de ondas sonoras

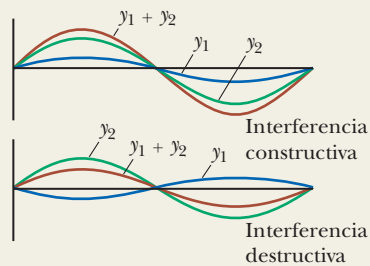
En la figura 18.4 se muestra un dispositivo simple para demostrar la interferencia de las ondas sonoras. El sonido de una bocina S se envía en un tubo en el punto P, donde hay una unión en forma de T. La mitad de la energía sonora viaja en

una dirección, y la otra mitad viaja en la dirección opuesta. Por lo tanto, las ondas sonoras que alcanzan el receptor R pueden viajar a lo largo de cualquiera de los dos caminos. La distancia a lo largo de cualquier camino de la bocina al receptor se llama la **longitud de trayectoria** r . El camino inferior de longitud r_1 es fijo, pero puede variar la trayectoria superior de longitud r_2 deslizando el tubo en forma de U, que es similar al de un trombón. Cuando la diferencia en las longitudes de la trayectoria $\Delta r = |r_2 - r_1|$ es entero o cero o un múltiplo de la longitud de onda λ (es decir, $\Delta r = n\lambda$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$), las dos ondas que llegan al receptor en cualquier instante están en fase e interfieren constructivamente, como se muestra en la figura 18.3a. Para este caso, un máximo en la intensidad del sonido se detecta en el receptor. Si la longitud de trayectoria r_2 se ajusta de tal modo que la diferencia de trayectoria $\Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2, \dots, n\lambda/2$ (para n impar), las dos ondas están exactamente a π rad o 180° fuera de fase en el receptor y, por lo tanto, se anulan mutuamente. En este caso de interferencia destructiva, ningún sonido se detecta en el receptor. Este sencillo experimento demuestra que puede surgir una diferencia de fase entre dos ondas generadas por la misma fuente cuando viajan a través de senderos de longitudes desiguales. Este importante fenómeno será indispensable en la investigación de interferencia de ondas luminosas en el capítulo 37.

Análisis de modelo

Ondas en interferencia

Imagine dos ondas que viajan en el mismo lugar a través de un medio. El desplazamiento de los elementos del medio se ve afectado por dos ondas. De acuerdo con el **principio de superposición**, el desplazamiento es la suma de los desplazamientos individuales que podría ser causado por cada onda. Cuando las ondas están en fase, se produce **interferencia constructiva** y el desplazamiento resultante es más grande que los desplazamientos individuales. Se produce **interferencia destructiva** cuando las ondas están desfasadas.



Ejemplos:

- un afinador de pianos escucha una cuerda de piano y un diapasón vibrando juntos y observa los pulsos (sección 18.7)
- se combinan ondas de luz de dos fuentes coherentes para formar un patrón de interferencia en una pantalla (capítulo 37)
- una delgada película de aceite sobre agua muestra remolinos de color (capítulo 37)
- los rayos X pasando a través de un sólido cristalino se combinan para formar un patrón de Laue (capítulo 38)

Ejemplo 18.1

Dos bocinas accionadas por la misma fuente

AM

Dos bocinas idénticas colocadas con una separación de 3.00 m son accionadas por el mismo oscilador (figura 18.5). Un escucha está originalmente en el punto O, situado a 8.00 m del centro de la recta que conecta a las dos bocinas. Luego el escucha se traslada al punto P, que está a una distancia perpendicular de 0.350 m de O, y experimenta el *primer mínimo* de intensidad del sonido. ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 18.4 una onda sonora entra en un tubo y después se divide *acústicamente* en dos trayectorias diferentes antes de recombinarse en el otro extremo. En este ejemplo, una señal que representa el sonido está *eléctricamente* dividida y sale a dos bocinas diferentes. Después de salir de los altavoces, las ondas sonoras se recombinan en la posición del escucha. A pesar de la diferencia en cómo se produce la división, en este caso se aplica la explicación de la diferencia de trayectoria vista en la figura 18.4.

Categorizar Ya que las ondas sonoras de dos fuentes separadas se combinan, aplicamos el análisis de modelo de *ondas en interferencia*.

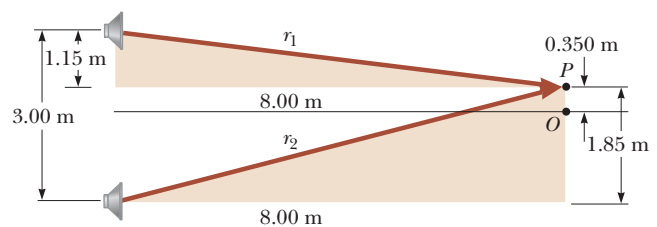


Figura 18.5 (Ejemplo 18.1) Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras para un escucha en P.

continúa

► 18.1 continuación

Analizar La figura 18.5 muestra la disposición física de las bocinas junto con dos triángulos rectángulos sombreados que pueden dibujarse sobre la base de las longitudes descritas en el problema. El primer mínimo se produce cuando las dos ondas que llegan al escucha en el punto P están a 180° fuera de fase, en otras palabras, cuando su diferencia de trayectoria Δr es igual a $\lambda/2$.

A partir de los triángulos sombreados, determine las longitudes de trayectoria de las bocinas al escucha:

$$r_1 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.15 \text{ m})^2} = 8.08 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.85 \text{ m})^2} = 8.21 \text{ m}$$

Por eso, la diferencia de trayectoria es $r_2 - r_1 = 0.13 \text{ m}$. Ya que esta diferencia de trayectoria debe ser igual a $\lambda/2$ para el primer mínimo, $\lambda = 0.26 \text{ m}$.

Para obtener la frecuencia del oscilador utilice la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, donde v es la rapidez del sonido en el aire, 343 m/s :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{0.26 \text{ m}} = 1.3 \text{ kHz}$$

Finalizar Este ejemplo permite entender por qué se deben conectar correctamente los alambres de un sistema estéreo de bocinas. Cuando se conectan al revés, es decir, cuando el cable positivo (o rojo) está conectado al borne negativo (o negro) en una de las bocinas y la otra está conectada correctamente, se dice que las bocinas están “fuera de fase”, con una bocina moviéndose hacia fuera, mientras que la otra se mueve hacia el interior. En consecuencia, la onda sonora que proviene de

una bocina interfiere destructivamente con la onda proveniente de la otra en el punto O de la figura 18.5. Una región de enrarecimiento debida a una bocina se superpone a una región de compresión de la otra bocina. Aunque los dos sonidos probablemente no se cancelan totalmente entre sí (porque generalmente no son idénticas las señales estereofónicas derecha e izquierda), se presenta una pérdida sustancial de la calidad sonora en el punto O .

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si las bocinas se conectaran fuera de fase? ¿Qué sucede en el punto P en la figura 18.5?

Respuesta En esta situación, la diferencia de trayectoria de $\lambda/2$ se combina con una diferencia de fase de $\lambda/2$ debido al cableado incorrecto para dar una diferencia de fase completa de λ . Como resultado, las ondas están en fase y hay una intensidad *máxima* en el punto P .



Figura 18.6 Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras una hacia la otra. Cuando se traslapan, las ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas se combinarán para formar ondas estacionarias.

18.2 Ondas estacionarias

Las ondas sonoras del par de bocinas del ejemplo 18.1 salen de las bocinas hacia adelante y hacen interferencia en un punto enfrente de las bocinas. Suponga que da vuelta a las bocinas de modo que una quede frente a la otra y luego hace que emitan sonido a la misma frecuencia y amplitud. En esta situación dos ondas idénticas viajan en direcciones opuestas en el mismo medio, como en la figura 18.6. Dichas ondas se combinan de acuerdo con el modelo de ondas en interferencia.

Se puede analizar esta situación considerando funciones de onda para dos ondas sinusoidales transversales que tengan la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que viajen en direcciones opuestas en el mismo medio:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

donde y_1 representa una onda que viaja en la dirección $+x$ y y_2 representa una que viaja en la dirección $-x$. Al sumar estas dos funciones da la función de onda resultante y :

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

Cuando se usa la identidad trigonométrica $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$, esta expresión se reduce a

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t \quad (18.1)$$

La ecuación 18.1 representa la función de onda de una **onda estacionaria**. Una onda estacionaria, como la de una de las cuerdas que se muestra en la figura 18.7, es un patrón de oscilación *con un contorno estacionario* que resulta de la sobreposición de dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas.

Observe que la ecuación 18.1 no contiene una función de $kx - \omega t$. Por lo tanto, no es una expresión para una sola onda viajera. Cuando usted observa una onda

La amplitud de la oscilación vertical de cualquier elemento de la cuerda depende de la posición horizontal del elemento. Cada elemento vibra dentro de los confines de la función envolvente $2A \sin kx$.

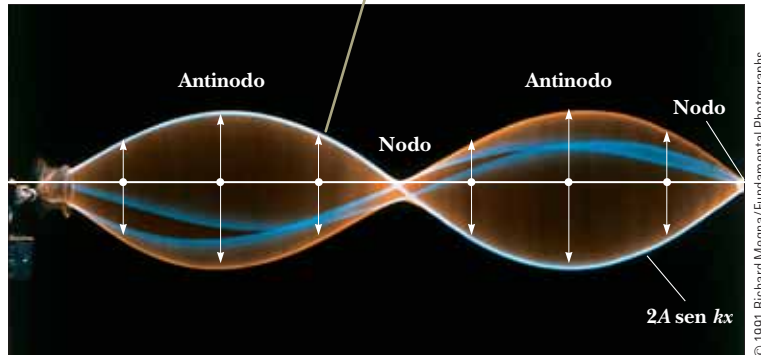


Figura 18.7 Fotografía múltiple de una onda estacionaria en una cuerda. El comportamiento temporal del desplazamiento vertical desde el equilibrio de un elemento individual de la cuerda está dado por $\cos \omega t$. Es decir, cada elemento vibra con una frecuencia angular ω .

estacionaria, no hay sentido de movimiento en la dirección de propagación de cualquier onda original. Al comparar la ecuación 18.1 con la ecuación 15.6, es clara la descripción de una clase especial de movimiento armónico simple. Cada elemento del medio oscila en movimiento armónico con la misma frecuencia angular ω (de acuerdo con el factor $\cos \omega t$ en la ecuación). Sin embargo, la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento (dada por el factor $2A \sin kx$, el coeficiente de la función coseno) depende de la ubicación x del elemento en el medio.

Si puede hallar un teléfono con un cordón enrollado, que conecte el auricular con una unidad base, podrá ver la diferencia entre una onda permanente y una onda viajera. Estire el cordón enrollado y chasquéelo con un dedo. Verá que un pulso viaja a lo largo de la cuerda. Ahora sacuda el auricular arriba y abajo y ajuste su frecuencia de sacudida hasta que cada rollo sobre la cuerda suba al mismo tiempo y luego baje. Esta es una onda estacionaria, formada por la combinación de las ondas que se alejan de su mano y que se reflejan de la unidad base hacia su mano. Observe que no hay ningún sentido del viaje a lo largo del cordón, como lo había para el pulso. Sólo ve altibajos en el movimiento de los elementos del cordón.

La ecuación 18.1 muestra que la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento del medio tiene un valor mínimo de cero cuando x satisface la condición $\sin kx = 0$, es decir, cuando

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Ya que $k = 2\pi/\lambda$, estos valores para kx producen

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18.2)$$

Estos puntos de amplitud cero se llaman **nodos**.

El elemento del medio con el *mayor* desplazamiento posible desde el equilibrio tiene una amplitud de $2A$, que se define como la amplitud de la onda estacionaria. Las posiciones en el medio donde se presenta este desplazamiento máximo se llaman **antinodos**. Los antinodos se ubican en posiciones que satisfacen la condición $\sin kx = \pm 1$ de la coordenada x , es decir, cuando

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Por lo tanto, las posiciones de los antinodos se dan por

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18.3)$$

En la figura 18.7 se etiquetan dos nodos y dos antinodos en la onda estacionaria. La curva azul claro, etiquetada $2A \sin kx$ en la figura 18.7, representa una longitud

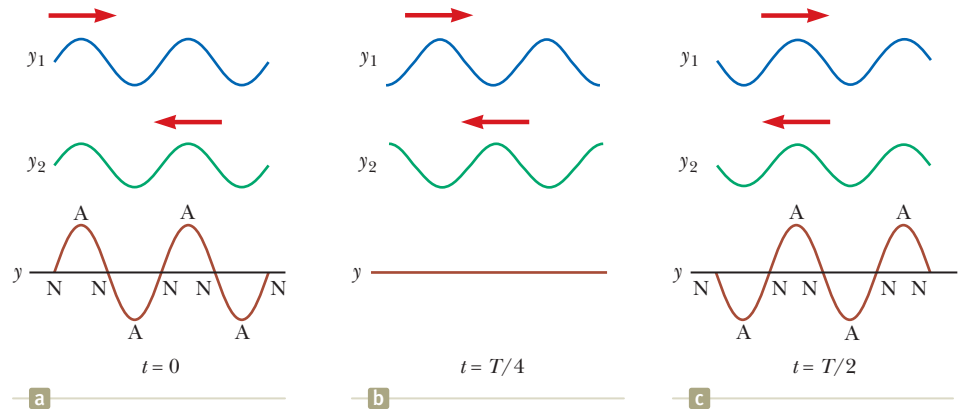
Prevención de riesgos ocultos 18.2

Tres tipos de amplitud Es necesario distinguir con claridad entre la **amplitud de las ondas individuales**, que es A , y la **amplitud del movimiento armónico simple de los elementos del medio**, que es $2A \sin kx$. Un elemento determinado en una onda estacionaria vibra dentro de las restricciones de la función *envolvente* $2A \sin kx$, donde x es la posición en el medio de dicho elemento. Tal vibración está en contraste con las ondas sinusoidales viajeras, en las que todos los elementos oscilan con la misma amplitud y la misma frecuencia, y la amplitud A de la onda es la misma que la amplitud A del movimiento armónico simple de los elementos. Además, se puede identificar la **amplitud de la onda estacionaria** como $2A$.

◀ Posición de nodos

◀ Posiciones de antinodos

Figura 18.8 Patrones de onda estacionaria producidos en diferentes momentos por dos ondas de igual amplitud que viajan en direcciones opuestas. Para la onda resultante y , los nodos (N) son puntos de desplazamiento cero y los antinodos (A) son puntos de desplazamiento máximo.



de onda de las ondas viajeras que se combinan para formar la onda estacionaria. La figura 18.7 y las ecuaciones 18.2 y 18.3 proporcionan las siguientes características de las ubicaciones de nodos y antinodos:

La distancia entre antinodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
 La distancia entre nodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
 La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$.

En la figura 18.8 aparecen los patrones de onda de los elementos del medio producidos en diferentes momentos por dos ondas viajeras transversales que se mueven en direcciones opuestas. Las curvas azul y verde son los patrones de onda para las ondas viajeras individuales, y las curvas cafés son los patrones de onda para la onda estacionaria resultante. En $t = 0$ (figura 18.8a) las dos ondas viajeras están en fase, lo que da un patrón de onda en el que cada elemento del medio está en reposo y experimenta su máximo desplazamiento desde el equilibrio. Un cuarto de periodo después, en $t = T/4$ (figura 18.8b), las ondas viajeras se movieron un cuarto de longitud de onda (una a la derecha y la otra a la izquierda). En este momento las ondas viajeras están fuera de fase y cada elemento del medio pasa a través de la posición de equilibrio en su movimiento armónico simple. El resultado es desplazamiento cero para los elementos en todos los valores de x ; es decir, el patrón de onda es una línea recta. En $t = T/2$ (figura 18.8c), las ondas viajeras de nuevo están en fase, lo que produce un patrón de onda que está invertido en relación con el patrón $t = 0$. En la onda estacionaria, los elementos del medio alternan en tiempo entre los extremos que se muestran en la figura 18.8a y c.

- Ejercicio 18.2** Considere ondas en una cuerda estirada, como se muestra en la figura 18.8. Defina la velocidad de los elementos de la cuerda como positiva si se mueven hacia arriba en la figura. (i) En el momento que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 18.8a, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda? (a) Cero para todos los elementos, (b) positiva para todos los elementos, (c) negativa para todos los elementos, (d) varía con la posición del elemento. (ii) A partir de las mismas opciones, en el momento que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 18.8b, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda?

Ejemplo 18.2 Formación de una onda estacionaria

Dos ondas que viajan en direcciones opuestas producen una onda estacionaria. Las funciones de onda individuales son

$$y_1 = 4.0 \sin(3.0x - 2.0t)$$

$$y_2 = 4.0 \sin(3.0x + 2.0t)$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos.

- (A)** Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento del medio ubicado en $x = 2.3$ cm.

18.2 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas descritas por las ecuaciones conocidas son idénticas, excepto por sus direcciones de viaje, así que de hecho se combinan para formar una onda estacionaria, como se explicó en esta sección. Podemos representar gráficamente las ondas por las curvas azules y verdes en la figura 18.8.

Categorizar Se sustituirán valores en las ecuaciones por desarrollar en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

A partir de las ecuaciones para las ondas $A = 4.0$ cm, $k = 3.0$ rad/cm y $\omega = 2.0$ rad/s. Use la ecuación 18.1 para escribir una expresión para la onda estacionaria:

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t = 8.0 \sin 3.0x \cos 2.0t$$

Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento en la posición $x = 2.3$ cm al evaluar la función seno en esta posición:

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= (8.0 \text{ cm}) \sin 3.0x \big|_{x=2.3} \\ &= (8.0 \text{ cm}) \sin (6.9 \text{ rad}) = 4.6 \text{ cm} \end{aligned}$$

(B) Encuentre las posiciones de los nodos y antinodos si un extremo de la cuerda está en $x = 0$.

SOLUCIÓN

Encuentre la longitud de onda de las ondas viajeras:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.0 \text{ rad/cm} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{3.0} \text{ cm}$$

Aplique la ecuación 18.2 para hallar las posiciones de los nodos:

$$x = n \frac{\lambda}{2} = n \left(\frac{\pi}{3.0} \right) \text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Utilice la ecuación 18.3 para encontrar las posiciones de los antinodos:

$$x = n \frac{\lambda}{4} = n \left(\frac{\pi}{6.0} \right) \text{ cm} \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera

Considere una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, como se muestra en la figura 18.9. Este sistema se usará como modelo para una cuerda de guitarra o piano. Las ondas pueden viajar en ambos sentidos en la cuerda. Por lo tanto, en la cuerda se pueden establecer ondas estacionarias mediante una superposición continua de ondas incidentes y reflejadas desde los extremos. Observe que hay una *condición de frontera* para las ondas en la cuerda. Ya que los extremos de la cuerda están fijos, necesariamente tienen desplazamiento cero y, por ende, son nodos por definición. La condición es que ambos extremos de la cuerda deben ser nodos fijos a la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda de acuerdo con la ecuación 18.2, que, a su vez, determina la frecuencia de la onda. Esta condición de frontera resulta en que la cuerda tenga un número de patrones de oscilación naturales discretos, llamados **modos normales**, cada uno con una frecuencia característica que se calcula con facilidad. Esta situación, en la que sólo se permiten ciertas frecuencias de oscilación, se llama **cuantización**, la cual es un acontecimiento común cuando las ondas se someten a condiciones de frontera y es una característica central para las explicaciones de física cuántica en la versión extendida de este texto. Note que en la figura 18.8 no hay condiciones de frontera, así que se pueden establecer ondas estacionarias de *cualquier* frecuencia; no hay cuantización sin condiciones de frontera. Ya que las condiciones de frontera se presentan con tanta frecuencia para las ondas, para la explicación que sigue se identifica un análisis de modelo llamado modelo de **ondas bajo condiciones de frontera**.

Los modos de oscilación normales para la cuerda de la figura 18.9 se describen al imponer las condiciones de frontera de que los extremos sean nodos y que los nodos estén separados por un medio de longitud de onda con los antinodos a la mitad

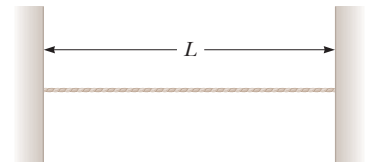


Figura 18.9 Una cuerda de longitud L fija en ambos extremos.

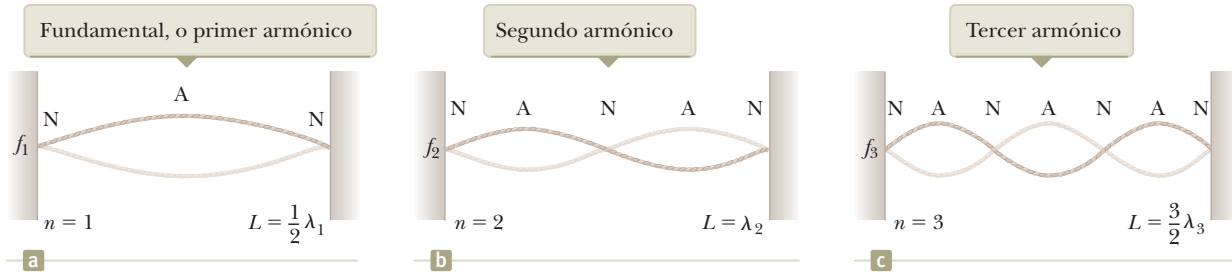


Figura 18.10 Los modos normales de vibración de la cuerda de la figura 18.9 forman una serie armónica. La cuerda vibra entre los extremos como se muestra.

entre los nodos. El primer modo normal que es consistente con estos requisitos, que se muestra en la figura 18.10a, tiene nodos en sus extremos y un antinodo en medio: es el modo de longitud de onda más larga que es consistente con las condiciones de frontera. El primer modo normal se presenta cuando la longitud de onda λ_1 es igual al doble de la longitud de la cuerda, o $\lambda_1 = 2L$. La sección de una onda estacionaria de un nodo al siguiente se llama *bucle*. En el primer modo normal, la cuerda vibra en un bucle. En el segundo modo normal (vea la figura 18.10b), la cuerda vibra en dos bucles. Cuando la mitad izquierda de la cuerda se mueve hacia arriba, la mitad izquierda lo hace hacia abajo. En este caso la longitud de onda λ_2 es igual a la longitud de la cuerda, como se expresa por $\lambda_2 = L$. El tercer modo normal (vea la figura 18.10c) corresponde al caso en que $\lambda_3 = 2L/3$ y la cuerda vibra en tres bucles. En general, las longitudes de onda de los diferentes modos normales para una cuerda de longitud L fija en ambos extremos son

Longitudes de onda ►
en modos normales

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.4)$$

donde el índice n se refiere al n -ésimo modo normal de oscilación. Estos modos son los *posibles*. Se discuten brevemente los modos *reales* que se excitan en una cuerda.

Las frecuencias naturales asociadas con los modos de oscilación se obtienen de la relación $f = v/\lambda$, donde la rapidez de onda v es la misma para todas las frecuencias. Al usar la ecuación 18.4 se encuentra que las frecuencias naturales f_n de los modos normales son

Frecuencias naturales ►
de modos normales como
funciones de la rapidez
de onda y la longitud de
la cuerda

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.5)$$

Estas frecuencias naturales también se llaman *frecuencias cuantizadas* asociadas con la cuerda oscilante fija en ambos extremos.

Ya que $v = \sqrt{T/\mu}$ (vea la ecuación 16.18) para ondas sobre una cuerda, donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal, también se expresan las frecuencias naturales de una cuerda tensa como

Frecuencias naturales de ►
modos normales como
funciones de la tensión en la
cuerda y la densidad de
masa lineal

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.6)$$

La frecuencia más baja de todas, f_1 , que corresponde a $n = 1$, se llama **fundamental** o **frecuencia fundamental** y está dada por

Frecuencia fundamental de ►
una cuerda tensa

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (18.7)$$

Las frecuencias de los modos restantes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (ec. 18.5). Las frecuencias de los modos normales que exhiben una correspondencia de múltiplo entero forman una **serie armónica**, y los modos normales se llaman **armónicos**. La frecuencia fundamental f_1 es la frecuencia del primer armónico, la frecuencia $f_2 = 2f_1$ es la frecuencia del segundo armónico y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia del n -ésimo armónico. Otros sistemas oscilatorios, como un parche de tambor, muestran modos normales, pero las frecuencias no se relacionan como múltiplos enteros de una fundamental (vea la sección 18.6). Por lo tanto, no se usa el término armónico en asociación con estos tipos de sistemas.

Examine un poco más cómo se crean en una cuerda los diferentes armónicos. Para excitar únicamente un solo armónico, la cuerda se debe distorsionar en una forma que corresponda a la del armónico deseado. Después de liberarse, la cuerda vibra a la frecuencia de dicho armónico. Sin embargo, esta maniobra es difícil de realizar y no es como se excita la cuerda de un instrumento musical. Si la cuerda se distorsiona de tal modo que su forma no sea sólo de un armónico, la vibración resultante incluye una combinación de diferentes armónicos. Tal distorsión se presenta en instrumentos musicales cuando la cuerda se puntea (como en una guitarra), se frota (como en un chelo) o se golpea (como en un piano). Cuando la cuerda se distorsiona en una forma no sinusoidal, sólo las ondas que satisfacen las condiciones de frontera pueden persistir en la cuerda. Estas ondas son los armónicos.

La frecuencia de una cuerda que define la nota musical que se toca es la fundamental aun cuando estén otros armónicos presentes. La frecuencia de la cuerda se varía al cambiar la tensión de la cuerda o su longitud. Por ejemplo, la tensión en las cuerdas de guitarra y violín se varía mediante un mecanismo de ajuste de tornillo o clavijas de afinación ubicadas en el diapasón del instrumento. A medida que aumenta la tensión, la frecuencia de los modos normales aumenta en concordancia con la ecuación 18.6. Una vez que el instrumento se “afina”, los intérpretes varían la frecuencia al mover sus dedos a lo largo del diapasón, lo que cambia la longitud de la porción oscilatoria de la cuerda. A medida que la longitud se acorta, la frecuencia aumenta porque, como especifica la ecuación 18.6, las frecuencias de modo normal son inversamente proporcionales a la longitud de la cuerda.

Examen rápido 18.3 Cuando una onda estacionaria se establece en una cuerda fija en ambos extremos, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) El número de nodos es igual al número de antinodos. (b) La longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda dividida entre un entero. (c) La frecuencia es igual al número de nodos por la frecuencia fundamental. (d) La forma de la cuerda en cualquier instante muestra una simetría en torno al punto medio de la cuerda.

Análisis de modelo Ondas bajo condiciones de frontera

Imagine una onda que no es libre de viajar a lo largo de todo el espacio, como en el modelo de la onda viajera. Si la onda está sujeta a condiciones de frontera, deben cumplirse ciertos requisitos en localizaciones específicas en el espacio; la onda se limita a un conjunto de **modos normales** con longitudes de onda cuantizadas y frecuencias naturales cuantizadas.

Para ondas sobre una cuerda fija en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.6)$$

donde T es la tensión en la cuerda y m es su densidad de masa lineal.



Ejemplos:

- ondas que viajan de ida y vuelta en una cuerda de guitarra se combinan para formar una onda estacionaria
- ondas sonoras que viajan de ida y vuelta en un clarinete se combinan para formar ondas estacionarias (sección 18.5)
- una partícula microscópica confinada en una pequeña región del espacio es modelada como una onda y presenta energías cuantizadas (capítulo 41)
- la energía de Fermi de un metal está determinada por el modelado de electrones como ondas-partículas en una caja (capítulo 43)

Ejemplo 18.3

¡Dame un Do!

AM

El Do medio en un piano tiene una frecuencia fundamental de 262 Hz, y la primera La sobre el Do medio tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

(A) Calcule las frecuencias de los siguientes dos armónicos de la cuerda Do.

continúa

► 18.3 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que los armónicos de una cuerda vibrante tienen frecuencias que se relacionan mediante múltiplos enteros de la fundamental.

Categorizar Esta primera parte del ejemplo es un simple problema de sustitución.

Al saber que la frecuencia fundamental es $f_1 = 262$ Hz, encuentre las frecuencias de los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = 524 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 786 \text{ Hz}$$

(B) Si las cuerdas La y Do tienen la misma densidad de masa lineal μ y longitud L , determine la razón de tensiones en las dos cuerdas.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del ejemplo es más un problema de análisis que el inciso (A), y utiliza el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera*.

Analizar Use la ecuación 18.7 para escribir expresiones para las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas:

$$f_{1A} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad \text{y} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda y resuelva para la razón de tensiones:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440}{262}\right)^2 = 2.82$$

Finalizar Si las frecuencias de las cuerdas de piano estuvieran determinadas exclusivamente por la tensión, este resultado sugiere que la razón de tensiones de la cuerda más baja a la cuerda más alta en el piano sería enorme. Tales tensiones tan grandes harían difícil diseñar un marco para sostener las cuerdas. En realidad, las frecuencias de las cuerdas de piano varían debido a parámetros adicionales, incluidas la masa por unidad de longitud y la longitud de la cuerda. El siguiente ¿Qué pasaría si? explora una variación de longitud.

¿QUÉ PASARÍA SI? Si usted observa el interior de un piano real, verá que la suposición hecha en el inciso (B) sólo es parcialmente verdadera. Es probable que las cuerdas no tengan la misma longitud. Las densidades de las cuerdas son iguales, pero suponga que la longitud de la cuerda La sólo es 64% de la longitud de la cuerda Do. ¿Cuál es la razón de sus tensiones?

Respuesta Una vez más con la ecuación 18.7 se establece la razón de frecuencias:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \frac{L_C}{L_A} \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{L_A}{L_C}\right)^2 \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2$$

$$\frac{T_A}{T_C} = (0.64)^2 \left(\frac{440}{262}\right)^2 = 1.16$$

Note que este resultado sólo representa 16% de aumento en tensión, comparado con 182% de aumento en el inciso (B).

Ejemplo 18.4

Cambio en la vibración de una cuerda con agua

AM

Un extremo de una cuerda horizontal se amarra a una varilla oscilante y el otro extremo pasa sobre una polea, como en la figura 18.11a. Una esfera de 2.00 kg de masa cuelga en el extremo de la cuerda. La cuerda oscila en su segundo armónico. Un contenedor de agua se eleva bajo la esfera de modo que ésta se sumerge por completo. En esta configuración, la cuerda vibra en su quinto armónico, como se muestra en la figura 18.11b. ¿Cuál es el radio de la esfera?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede cuando la esfera se sumerge en el agua. La fuerza de flotación actúa hacia arriba sobre la esfera, lo que reduce la tensión en la cuerda. El cambio en tensión causa un cambio en la rapidez de las ondas sobre

18.4 continuación

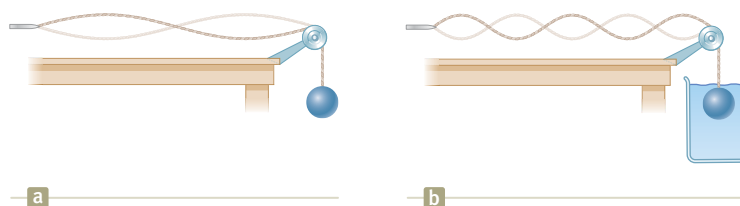


Figura 18.11 (Ejemplo 18.4)
(a) Cuando la esfera cuelga en el aire, la cuerda vibra en su segundo armónico. (b) Cuando la esfera se sumerge en agua, la cuerda vibra en su quinto armónico.

la cuerda, que a su vez ocasiona un cambio en la longitud de onda. Esta longitud de onda alterada provoca que la cuerda vibre en su quinto modo normal en lugar de hacerlo en el segundo.

Categorizar La esfera colgante se modela como una *partícula en equilibrio*. Una de las fuerzas que actúan sobre ella es la fuerza de flotación del agua. También se aplica el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera* a la cuerda.

Analizar Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 18.11a e identifique a T_1 como la tensión en la cuerda mientras la esfera cuelga en aire:

$$\sum F = T_1 - mg = 0$$

$$T_1 = mg$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 18.11b, donde T_2 es la tensión en la cuerda mientras la esfera se sumerge en agua:

$$T_2 + B - mg = 0$$

$$(1) \quad B = mg - T_2$$

La cantidad deseada, el radio de la esfera, aparecerá en la expresión para la fuerza de flotación B . No obstante, antes de proceder en esta dirección debe evaluar T_2 a partir de la información acerca de la onda estacionaria.

Escriba la ecuación para la frecuencia de una onda estacionaria sobre una cuerda (ecuación 18.6) dos veces, una vez antes de que la esfera se sumerja y otra después. Note que la frecuencia f es la misma en ambos casos porque está determinada por la varilla oscilante. Además, la densidad de masa lineal μ y la longitud L de la porción oscilante de la cuerda son las mismas en ambos casos. Divida las ecuaciones:

$$f = \frac{n_1}{2L} \sqrt{\frac{T_1}{\mu}} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$f = \frac{n_2}{2L} \sqrt{\frac{T_2}{\mu}}$$

Resuelva para T_2 :

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 mg$$

Sustituya este resultado en la ecuación (1):

$$(2) \quad B = mg - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 mg = mg \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \right]$$

Con la ecuación 14.5 exprese la fuerza de flotación en términos del radio de la esfera:

$$B = \rho_{\text{agua}} g V_{\text{esfera}} = \rho_{\text{agua}} g \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

Resuelva para el radio de la esfera y sustituya de la ecuación (2):

$$r = \left(\frac{3B}{4\pi\rho_{\text{agua}} g} \right)^{1/3} = \left\{ \frac{3m}{4\pi\rho_{\text{agua}}} \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \right] \right\}^{1/3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$r = \left\{ \frac{3(2.00 \text{ kg})}{4\pi(1000 \text{ kg/m}^3)} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \right] \right\}^{1/3}$$

$$= 0.0737 \text{ m} = 7.37 \text{ cm}$$

Finalizar Note que sólo ciertos radios de la esfera resultarán en que la cuerda vibre en un modo normal; la rapidez de las ondas en la cuerda debe cambiar a un valor tal que la longitud de la cuerda sea un múltiplo entero de medias longitudes de onda. Esta limitación es una característica de la *cuantización* que se introdujo en este capítulo: los radios de la esfera que hacen vibrar la cuerda en un modo normal están *cuantizados*.

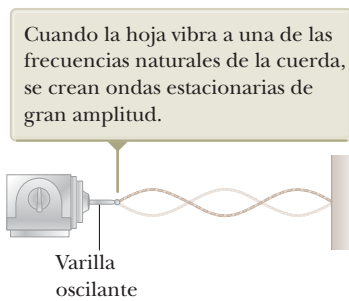


Figura 18.12 En una cuerda se establecen ondas estacionarias cuando un extremo se conecta a una varilla oscilante.

18.4 Resonancia

Se vio que un sistema como una cuerda tensa es capaz de oscilar en uno o más modos de oscilación normales. Suponga que maneja este tipo de cuerda con una varilla oscilante, como en la figura 18.12. Encontramos que si se aplica una fuerza periódica a tal sistema, la amplitud del movimiento resultante es mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema. Este fenómeno, conocido como *resonancia*, se discutió en la sección 15.7. Aunque un sistema bloque-resorte o un péndulo simple sólo tienen una frecuencia natural, los sistemas de onda estacionaria tienen todo un conjunto de frecuencias naturales, como las dadas por la ecuación 18.6 para una cuerda. Ya que un sistema en oscilación muestra una gran amplitud cuando se activa a cualquiera de sus frecuencias naturales, a estas frecuencias por lo general se les refiere como **frecuencias de resonancia**.

Considere de nuevo la cuerda de la figura 18.12. El extremo fijo es un nodo, y el extremo conectado a la varilla es casi un nodo porque la amplitud del movimiento de la varilla es pequeña en comparación con el de los elementos de la cuerda. A medida que la varilla oscila, las ondas transversales que envía por la cuerda se reflejan desde el extremo fijo. Como aprendió en la sección 18.3, la cuerda tiene frecuencias naturales que están determinadas por su longitud, tensión y densidad de masa lineal (vea la ecuación 18.6). Cuando la frecuencia de la varilla es igual a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se producen ondas estacionarias y la cuerda oscila con una gran amplitud. En este caso de resonancia, la onda generada por la varilla oscilante está en fase con la onda reflejada y la cuerda absorbe energía de la varilla. Si la cuerda es impulsada a una frecuencia que no es una de sus frecuencias naturales, las oscilaciones son de baja amplitud y no muestran un patrón estable. La resonancia es muy importante en la excitación de los instrumentos musicales en función de columnas de aire. Esta aplicación de la resonancia se explicará en la sección 18.5.

18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

Las ondas bajo condiciones de frontera también se aplican a ondas sonoras en una columna de aire como la que se encuentra en el interior de un órgano de tubos o en un clarinete. Las ondas estacionarias son resultado de la interferencia entre ondas sonoras longitudinales que viajan en direcciones opuestas.

En un tubo cerrado en un extremo, dicho extremo es un **nodo de desplazamiento** porque la barrera rígida en este extremo no permite el movimiento longitudinal del aire. Ya que la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento (vea la sección 17.1), el extremo cerrado de una columna de aire corresponde a un **antinodo de presión** (es decir, un punto de máxima variación de presión).

El extremo abierto de una columna de aire es aproximadamente un **antinodo de desplazamiento**¹ y un nodo de presión. Se puede entender por qué no se presenta variación de presión en un extremo abierto al notar que el extremo de la columna de aire está abierto a la atmósfera; por lo tanto, la presión en este extremo debe permanecer constante a presión atmosférica.

Acaso se pregunte cómo una onda sonora se refleja de un extremo abierto y por qué al parecer no ha habido cambio en el medio en este punto: el medio a través del que se mueve la onda sonora es aire, tanto dentro como fuera del tubo. Sin embargo, el sonido es una onda de presión, y una región de compresión de la onda sonora está restringida por los lados del tubo en tanto la región esté dentro del tubo. A medida que la región de compresión sale en el extremo abierto del tubo, la restricción del tubo se retira y el aire comprimido es libre de expandirse en la atmósfera. En con-

¹En sentido estricto, el extremo abierto de una columna de aire no es exactamente un antinodo de desplazamiento. Alcanzar una compresión en el extremo abierto no se refleja hasta que pasa más allá del extremo. A la longitud de la columna de aire para un tubo de sección transversal circular, se debe agregar una corrección terminal aproximadamente igual a $0.6R$, donde R es el radio del tubo. Por eso, la longitud efectiva de la columna de aire es un poco mayor que la verdadera longitud L . En esta explicación se ignora esta corrección terminal.

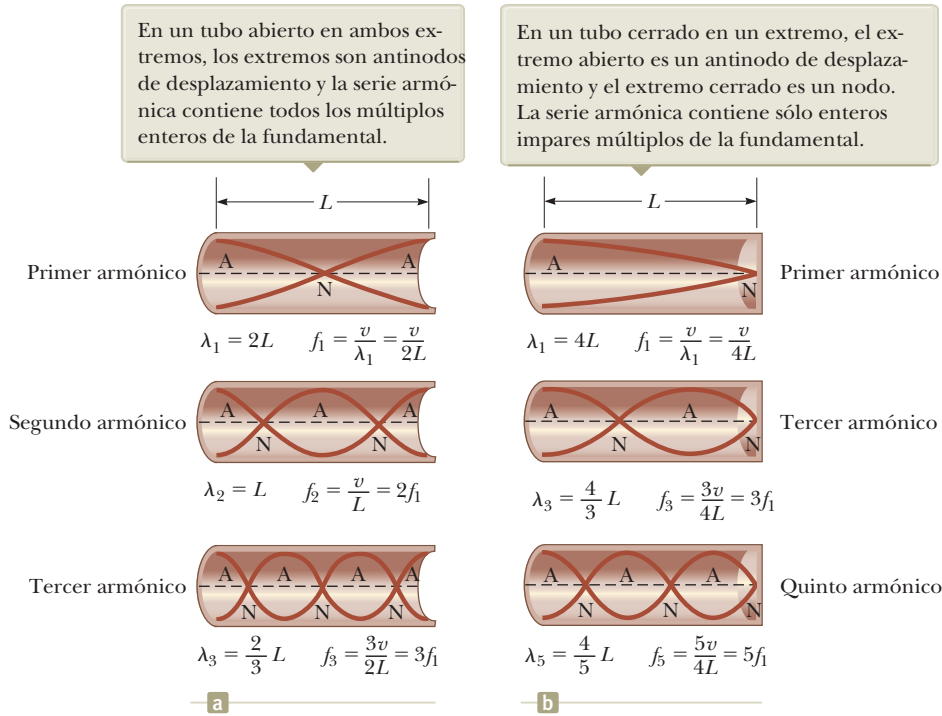


Figura 18.13 Representaciones gráficas del movimiento de elementos de aire en ondas longitudinales estacionarias en (a) una columna abierta por ambos extremos y (b) una columna cerrada por un extremo.

secuencia, hay un cambio *distintivo* del medio entre el interior del tubo y el exterior, aun cuando no haya cambio en el *material* del medio. Este cambio distintivo es suficiente para permitir cierta reflexión.

Con las condiciones de frontera de nodos o antinodos en los extremos de la columna de aire se tiene un conjunto de modos normales de oscilación, como es el caso para la cuerda fija en ambos extremos. Por lo tanto, la columna de aire tiene frecuencias cuantizadas.

En la figura 18.13a se muestran los primeros tres modos normales de oscilación de un tubo abierto en ambos extremos. Note que ambos extremos son antinodos de desplazamiento (aproximadamente). En el primer modo normal la onda estacionaria se extiende entre dos antinodos adyacentes, que es una distancia de media longitud de onda. En consecuencia, la longitud de onda tiene el doble de largo que el tubo, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/2L$. Como muestra la figura 18.13a, las frecuencias de los armónicos superiores son $2f_1, 3f_1, \dots$

En un tubo abierto en ambos extremos, las frecuencias naturales de oscilación forman una serie armónica que incluye todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Ya que todos los armónicos están presentes y como la frecuencia fundamental se conoce por la misma expresión que en la cuerda (vea la ecuación 18.5), las frecuencias de oscilación naturales se expresan como

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.8)$$

A pesar de la similitud entre las ecuaciones 18.5 y 18.8, debe recordar que en la ecuación 18.5, v es la rapidez de las ondas en la cuerda, mientras que v en la ecuación 18.8 es la rapidez del sonido en el aire.

Si un tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro, el extremo cerrado es un nodo de desplazamiento (vea la figura 18.13b). En este caso, la onda estacionaria para el modo fundamental se extiende desde un antinodo hasta el nodo adyacente, que es un cuarto de longitud de onda. Por tanto, la longitud de onda para el primer modo normal es $4L$, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/4L$. Como muestra la figura 18.13b, las ondas de frecuencia más alta que satisfacen las condiciones son

Prevención de riesgos ocultos 18.3

Las ondas sonoras en el aire son longitudinales, no transversales En la figura 18.13 las ondas longitudinales estacionarias se dibujan como ondas transversales. Como están en la misma dirección que la propagación, es difícil dibujar desplazamientos longitudinales. Por lo tanto, es mejor interpretar las curvas en café de la figura 18.13 como una representación gráfica de las ondas (los diagramas de ondas en cuerda son representaciones gráficas), con el eje vertical que representa el desplazamiento horizontal $s(x, t)$ de los elementos del medio.

Frecuencias naturales de un tubo abierto en ambos extremos

aquellas que tienen un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto; en consecuencia, los armónicos superiores tienen frecuencias $3f_1, 5f_1, \dots$

En un tubo cerrado en un extremo las frecuencias de oscilación naturales forman una serie armónica que incluye sólo múltiplos enteros impares de la frecuencia fundamental.

Este resultado se expresa matemáticamente como

$$f_n = n \frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18.9)$$

Frecuencias naturales de un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro

Es interesante investigar qué sucede con las frecuencias de los instrumentos en función de columnas de aire y cuerdas durante un concierto mientras sube la temperatura. Por ejemplo, el sonido emitido por una flauta se vuelve más agudo (eleva su frecuencia), ya que ésta se calienta porque la rapidez del sonido aumenta en el aire cada vez más caliente en su interior (considere la ecuación 18.8). El sonido producido por un violín se vuelve plano (disminuye en frecuencia) a medida que las cuerdas se expanden térmicamente, porque la expansión hace que su tensión disminuya (vea la ecuación 18.6).

Los instrumentos musicales en función de columnas de aire por lo general se excitan mediante resonancia. La columna de aire recibe una onda sonora que es rica en muchas frecuencias. En tal caso, la columna de aire responde con una oscilación de mayor amplitud a las frecuencias que coinciden con las frecuencias cuantizadas en su conjunto de armónicos. En muchos instrumentos de viento hechos con madera, el rico sonido inicial lo proporciona una lengüeta que vibra. En los instrumentos metálicos dicha excitación la proporciona el sonido proveniente de la vibración de los labios del intérprete. En una flauta, la excitación inicial proviene de soplar sobre un borde en la boca del instrumento, en forma similar a soplar a través de la abertura de una botella con un cuello estrecho. El sonido del aire que corre a través del borde tiene muchas frecuencias, incluida una que pone en resonancia la cavidad de aire en la botella.

Ejercicio rápido 18.4 Un tubo abierto en ambos extremos resuena a una frecuencia fundamental f_{abierto} . Cuando un extremo se cubre y de nuevo se hace resonar el tubo, la frecuencia fundamental es f_{cerrado} . ¿Cuál de las siguientes expresiones describe cómo se comparan estas dos frecuencias resonantes? (a) $f_{\text{cerrado}} = f_{\text{abierto}}$, (b) $f_{\text{cerrado}} = \frac{1}{2} f_{\text{abierto}}$, (c) $f_{\text{cerrado}} = 2f_{\text{abierto}}$, (d) $f_{\text{cerrado}} = \frac{3}{2} f_{\text{abierto}}$.

Ejercicio rápido 18.5 El Parque Balboa, en San Diego, tiene un órgano al aire libre. Cuando la temperatura del aire aumenta, la frecuencia fundamental de uno de los tubos del órgano (a) permanece igual, (b) baja, (c) sube o (d) es imposible de determinar.

Ejemplo 18.5 Viento en una alcantarilla

Una sección de alcantarillas de drenaje de 1.23 m de largo hace un ruido de aullido cuando el viento sopla a través de sus extremos abiertos.

(A) Determine las frecuencias de los primeros tres armónicos de la alcantarilla si tiene forma cilíndrica y está abierta en ambos extremos. Considere $v = 343 \text{ m/s}$ como la rapidez del sonido en el aire.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sonido del viento que sopla a través del extremo del tubo contiene muchas frecuencias y la alcantarilla responde al sonido mediante vibración a las frecuencias naturales de la columna de aire.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Determine la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire abierta en ambos extremos:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2(1.23 \text{ m})} = 139 \text{ Hz}$$

Encuentre los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = 279 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 418 \text{ Hz}$$

18.5 continuación

(B) ¿Cuáles son las tres frecuencias naturales más bajas de la alcantarilla si está bloqueada en un extremo?

SOLUCIÓN

Encuentre la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire cerrada en un extremo.

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(1.23 \text{ m})} = 69.7 \text{ Hz}$$

Encuentre los siguientes dos armónicos al multiplicar por enteros impares:

$$f_3 = 3f_1 = 209 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 5f_1 = 349 \text{ Hz}$$

Ejemplo 18.6**Medición de la frecuencia de un diapasón****AM**

En la figura 18.14 se ilustra un aparato simple para demostrar la resonancia en columnas de aire. Un tubo vertical abierto en ambos extremos se sumerge parcialmente en agua y un diapasón oscilante con una frecuencia desconocida se coloca cerca de la parte superior del tubo. La longitud L de la columna de aire se ajusta al mover el tubo verticalmente. Las ondas sonoras generadas por el diapasón se refuerzan cuando L corresponde a una de las frecuencias de resonancia del tubo. Para cierto tubo, el valor más pequeño de L para el que se presenta un pico en la intensidad sonora es 9.00 cm.

(A) ¿Cuál es la frecuencia del diapasón?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas sonoras del diapasón vibratorio entran en el tubo en su extremo superior. Aunque el tubo está abierto en su extremo inferior para permitir que entre el agua, la superficie del agua actúa como una barrera. Las ondas se reflejan de la superficie del agua y se combinan con las que se mueven hacia abajo para formar una onda estacionaria.

Categorizar Debido a la reflexión de las ondas de sonido de la superficie del agua podemos modelar al tubo como abierto en el extremo superior y cerrado en el extremo inferior. Por lo tanto, podemos aplicar el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera* a esta situación.

Analizar

Use la ecuación 18.9 para hallar la frecuencia fundamental para $L = 0.090 \text{ m}$:

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(0.090 \text{ m})} = 953 \text{ Hz}$$

Ya que el diapasón hace que la columna de aire resuene a esta frecuencia, esta frecuencia también debe ser la del diapasón.

(B) ¿Cuáles son los valores de L para las siguientes dos condiciones de resonancia?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 16.12 para encontrar la longitud de onda de la onda sonora del diapasón:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{953 \text{ Hz}} = 0.360 \text{ m}$$

Note de la figura 18.14b que la longitud de la columna de aire para la segunda resonancia es $3\lambda/4$:

$$L = 3\lambda/4 = 0.270 \text{ m}$$

Observe en la figura 18.14b que la longitud de la columna de aire para la tercera resonancia es $5\lambda/4$:

$$L = 5\lambda/4 = 0.450 \text{ m}$$

Finalizar Considere cómo difiere este problema del ejemplo anterior. En la alcantarilla la longitud es fija y la columna del aire se presentó con una mezcla de muchas frecuencias. El tubo en este ejemplo se presenta con una frecuencia única del diapasón, y se varía la longitud del tubo hasta que se alcanza una resonancia.

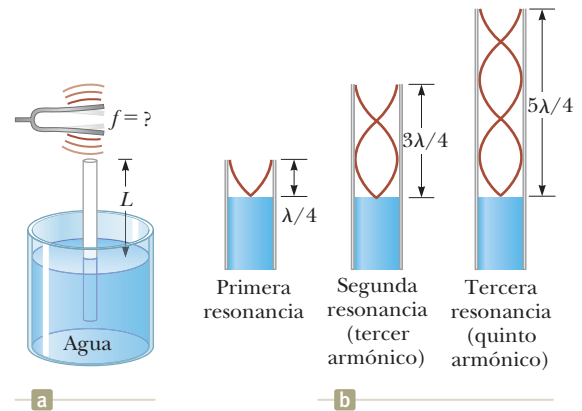


Figura 18.14 (Ejemplo 18.6) (a) Aparato para demostrar la resonancia de ondas sonoras en un tubo cerrado en un extremo. La longitud L de la columna de aire varía al mover el tubo verticalmente mientras se sumerge parcialmente en agua. (b) Primeros tres modos normales del sistema que se muestra en (a).

18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

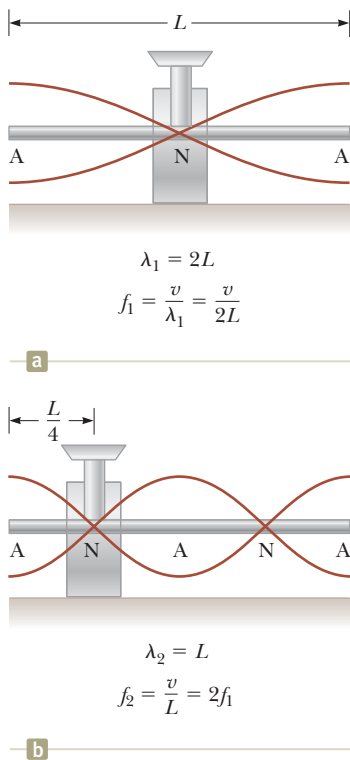


Figura 18.15 Vibraciones longitudinales de modo normal de una barra de longitud L (a) sujeta en el punto medio para producir el primer modo normal y (b) sujeta a una distancia $L/4$ desde un extremo para producir el segundo modo normal. Note que las curvas rojas representan oscilaciones paralelas a la barra (ondas longitudinales).

Las ondas estacionarias también se presentan en barras y membranas. Una barra sujeta en la parte media y que recibe un golpe, paralelo a la barra, en un extremo, oscila como se muestra en la figura 18.15a. Las oscilaciones de los elementos de la barra son longitudinales, y por eso las curvas rojas en la figura 18.15 representan desplazamientos *longitudinales* de diferentes partes de la barra. Para tener más claridad, los desplazamientos se dibujaron en la dirección transversal, como si fuesen columnas de aire. El punto medio es un nodo de desplazamiento porque está fijo por el tornillo de banco, mientras los extremos son antinodos de desplazamiento porque tienen libertad para oscilar. Las oscilaciones en este arreglo son análogas a las de un tubo abierto en ambos extremos. Las líneas rojas en la figura 18.15a representan el primer modo normal, para el que la longitud de onda es $2L$ y la frecuencia es $f = v/2L$, donde v es la rapidez de las ondas longitudinales en la barra. Otros modos normales se excitan al sujetar la barra en diferentes puntos. Por ejemplo, el segundo modo normal (figura 18.15b) se excita al sujetar la barra a una distancia $L/4$ desde un extremo.

También es posible establecer ondas estacionarias transversales en barras. Los instrumentos musicales que dependen de ondas estacionarias transversales en barras incluyen triángulos, marimbas, xilófonos, órganos de campanas, carillones y vibráfonos. Otros dispositivos que hacen sonidos a partir de barras oscilantes incluyen las cajas musicales y los carillones de viento.

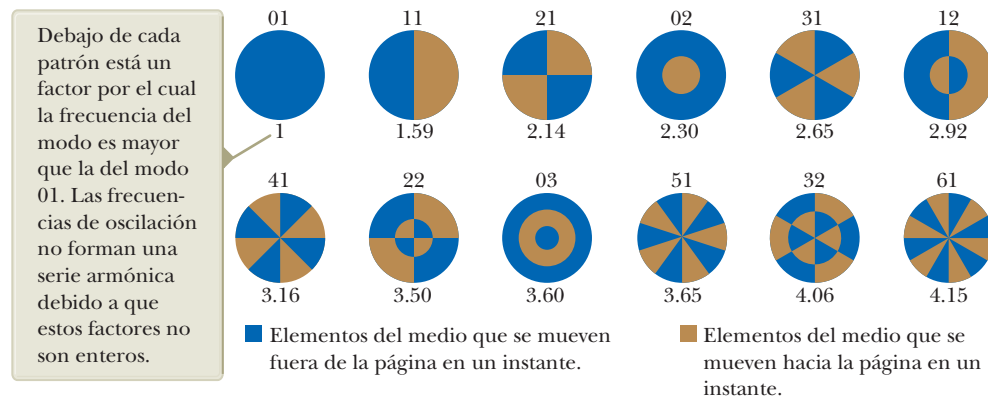
En una membrana flexible estirada sobre un aro circular, como la de un parche de tambor, se establecen oscilaciones bidimensionales. Mientras la membrana se golpea en algún punto, las ondas que llegan a la frontera fija se reflejan muchas veces. El sonido resultante no es armónico porque las ondas estacionarias tienen frecuencias que *no* se relacionan mediante números enteros. Al faltar esta relación ya no se trata de sonido sino, más correctamente, de *ruido* en lugar de música. La producción de ruido contrasta con la situación de los instrumentos de aliento y cuerda que producen sonidos que se describen como musicales.

En la figura 18.16 se muestran algunos posibles modos de oscilación normales para una membrana circular bidimensional. Mientras que los nodos son *puntos* en ondas estacionarias unidimensionales sobre cuerdas y columnas de aire, un oscilador en dos dimensiones tiene *curvas* a lo largo de las que no hay desplazamiento de los elementos del medio. El modo normal más bajo, que tiene una frecuencia f_1 , sólo contiene una curva nodal; esta curva corre alrededor del borde exterior de la membrana. Los otros posibles modos normales muestran curvas nodales adicionales que son círculos y líneas rectas a través del diámetro de la membrana.

18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

El fenómeno de interferencia estudiado hasta el momento involucra la sobreposición de dos o más ondas que tienen la misma frecuencia. Ya que la amplitud de la oscila-

Figura 18.16 Representación de algunos de los posibles modos normales en una membrana circular fija en su perímetro. El par de números en cada patrón corresponde al número de nodos radiales y al número de nodos circulares, respectivamente. En cada diagrama, los elementos de la membrana en cualquier lado de una línea nodal se mueven en direcciones opuestas, como se indica por los colores. (Adaptado de T. D. Rossing, *La ciencia del sonido*, 3a. ed., Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Co., 2001.)



ción de los elementos del medio varía con la posición en el espacio del elemento en tal onda, a dicho fenómeno se le refiere como *interferencia espacial*. Las ondas estacionarias en cuerdas y tubos son ejemplos comunes de interferencia espacial.

Ahora considere otro tipo de interferencia, uno que resulta de la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente *diferentes*. En este caso, cuando las dos ondas se observan en un punto en el espacio, están periódicamente en y fuera de fase. Es decir: hay una alternación *temporal* (tiempo) entre interferencia constructiva y destructiva. Debido a este fenómeno se le refiere como *interferencia en el tiempo* o *interferencia temporal*. Por ejemplo, si se golpean dos diapasones de frecuencias ligeramente diferentes, uno escucha un sonido de amplitud periódicamente variable. Este fenómeno se llama **batimiento**.

El batimiento es la variación periódica en amplitud en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

◀ Definición de batimiento

El número de máximos de amplitud que uno escucha por segundo, o la *frecuencia de batimiento*, es igual a la diferencia en frecuencia entre las dos fuentes, como se demostrará a continuación. La máxima frecuencia de batimiento que detecta el oído humano es de aproximadamente 20 batimientos/s. Cuando la frecuencia de batimiento supera este valor, los batimientos se mezclan de manera indistinguible con los sonidos que los producen.

Considere dos ondas sonoras de igual amplitud que viajan a través de un medio con frecuencias ligeramente diferentes f_1 y f_2 . Usando ecuaciones similares a la ecuación 16.13 se representan las funciones de onda para estas dos ondas en un punto que identificamos como $x = 0$. También elegimos el ángulo de fase en la ecuación 16.13 como $\phi = \pi/2$:

$$y_1 = A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) = A \cos(2\pi f_1 t)$$

$$y_2 = A \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t\right) = A \cos(2\pi f_2 t)$$

Al usar el principio de sobreposición se encuentra que la función de onda resultante en este punto es

$$y = y_1 + y_2 = A (\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

La identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

permite escribir la expresión para y como

$$y = \left[2A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \right] \cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \quad (18.10)$$

◀ Resultante de dos ondas de frecuencias diferentes pero igual amplitud

En la figura 18.17 se muestran gráficas de las ondas individuales y la onda resultante. A partir de los factores de la ecuación 18.10 se ve que la onda resultante tiene una

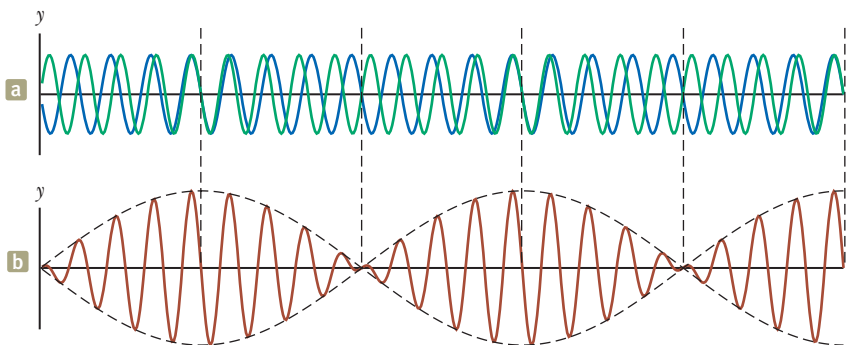


Figura 18.17 Los batimientos se forman por la combinación de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes. (a) Ondas individuales. (b) Onda combinada. La onda envolvente (línea discontinua) representa el batimiento de los sonidos combinados.

frecuencia efectiva igual a la frecuencia promedio $(f_1 + f_2)/2$. Esta onda se multiplica por una onda envolvente conocida por la expresión entre corchetes:

$$y_{\text{envolvente}} = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \quad (18.11)$$

Es decir: la amplitud y, por lo tanto, la intensidad del sonido resultante varía en el tiempo. La línea negra discontinua en la figura 18.17b es una representación gráfica de la onda envolvente en la ecuación 18.11 y es una onda seno que varía con frecuencia $(f_1 - f_2)/2$.

En la onda sonora resultante se detecta un máximo en la amplitud siempre que

$$\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = \pm 1$$

Por tanto, existen *dos* máximos en cada periodo de la onda envolvente. Ya que la amplitud varía con la frecuencia, como $(f_1 - f_2)/2$, el número de batimientos por segundo, o la **frecuencia de batimiento** $f_{\text{batimiento}}$, es el doble de este valor. Es decir,

Frecuencia de batimiento ►

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \quad (18.12)$$

Por ejemplo, si un diapasón vibra a 438 Hz y otro vibra después a 442 Hz, la onda sonora resultante de la combinación tiene una frecuencia de 440 Hz (la nota musical La) y una frecuencia de batimiento de 4 Hz. Un escucha oiría una onda sonora de 440 Hz que pasaría por un máximo de intensidad cuatro veces cada segundo.

Ejemplo 18.7

Las cuerdas de piano desafinadas

AM

Dos cuerdas de piano idénticas, de 0.750 m de longitud, se afinan cada una exactamente a 440 Hz. La tensión en una de las cuerdas después aumenta en 1.0%. Si ahora se golpean, ¿cuál es la frecuencia de batimiento entre las fundamentales de las dos cuerdas?

SOLUCIÓN

Conceptualizar A medida que la tensión en una de las cuerdas cambia, su frecuencia fundamental cambia. Por lo tanto, cuando ambas cuerdas se tocan, tendrán diferentes frecuencias y se escucharán batimientos.

Categorizar Se debe combinar la interpretación de las *ondas bajo condiciones de frontera* para cuerdas con el reciente conocimiento de los batimientos.

Analizar Establezca una relación de las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas con la ecuación 18.5:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(v_2/2L)}{(v_1/2L)} = \frac{v_2}{v_1}$$

Aplique la ecuación 16.18 para sustituir las magnitudes de rapidez de onda en las cuerdas:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{T_2/\mu}}{\sqrt{T_1/\mu}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Incorpore que la tensión en una cuerda es 1.0% mayor que la otra; es decir, $T_2 = 1.010T_1$

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{1.010T_1}{T_1}} = 1.005$$

Resuelva para la frecuencia de la cuerda tensada

$$f_2 = 1.005f_1 = 1.005(440 \text{ Hz}) = 442 \text{ Hz}$$

Encuentre la frecuencia de batimiento con la ecuación 18.12:

$$f_{\text{batimiento}} = 442 \text{ Hz} - 440 \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}$$

Finalizar Note que una desafinación de 1.0% en la tensión conduce a una frecuencia de batimiento fácilmente audible de 2 Hz. Un afinador de piano puede usar batimientos para afinar un instrumento de cuerda al “batir” una nota contra un tono de referencia de frecuencia conocida. Después el afinador puede ajustar la tensión de la cuerda hasta que la frecuencia del sonido que emite sea igual a la frecuencia del tono de referencia. El afinador lo hace al apretar o aflojar la cuerda hasta que los batimientos producidos por ella y la fuente de referencia se vuelven prácticamente imposibles de notar.

18.8 Patrones de onda no sinusoidales

Es relativamente sencillo distinguir los sonidos que surgen de un violín y un saxofón, aun cuando ambos ejecuten la misma nota. Por otra parte, una persona no entrenada en música tendrá dificultades para distinguir una nota tocada en un clarinete de la misma nota tocada en un oboe. Se puede usar el patrón de las ondas sonoras de diferentes fuentes para explicar estos efectos.

Cuando las frecuencias, que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, se combinan para hacer un sonido, el resultado es un sonido *musical*. Un escucha puede asignar un tono al sonido de acuerdo con la frecuencia fundamental. El tono es una reacción psicológica a un sonido que permite al escucha colocar el sonido en una escala de bajo a alto (grave a agudo). Las combinaciones de las frecuencias que no son múltiplos enteros de una fundamental resultan en un *ruido* en lugar de un sonido musical. Es mucho más difícil para un escucha asignar un tono a un ruido que a un sonido musical.

Los patrones de onda producidos por un instrumento musical son el resultado de la sobreposición de frecuencias que son múltiplos enteros de una fundamental. Esta sobreposición resulta en la correspondiente riqueza de tonos musicales. La respuesta perceptiva humana asociada con diferentes mezclas de armónicos es la *calidad* o *timbre* del sonido. Por ejemplo, el sonido de la trompeta se percibe con una calidad “chillona” (se aprendió a asociar el adjetivo *chillón* con dicho sonido); esta calidad permite distinguir el sonido de la trompeta del propio del saxofón, cuya calidad se percibe como “alengüetada”. Sin embargo, el clarinete y el oboe contienen columnas de aire excitadas por lengüetas; debido a esta similitud, tienen mezclas de frecuencias similares y es más difícil para el oído humano distinguir las sobre la base de su calidad sonora.

Los patrones de onda sonora producidos por la mayoría de los instrumentos musicales son no sinusoidales. En la figura 18.18 se muestran los patrones característicos producidos por un diapasón, una flauta y un clarinete, cada uno tocando la misma nota. Cada instrumento tiene su propio patrón característico. Sin embargo, note que a pesar de las diferencias en los patrones, cada patrón es periódico. Este punto es importante para el análisis de estas ondas.

El problema de analizar patrones de onda no sinusoidales aparece a primera vista como una tarea formidable. Sin embargo, si el patrón de onda es periódico, se puede representar tan cercano como se desee mediante la combinación de un número suficientemente grande de ondas sinusoidales que formen una serie armónica. De hecho, cualquier función periódica se representa como una serie de términos seno y coseno con el uso de una técnica matemática en términos del **teorema de Fourier**.² La correspondiente suma de términos que representan el patrón de onda periódica se llama **serie de Fourier**. Sea $y(t)$ cualquier función periódica en el tiempo con un periodo T tal que $y(t + T) = y(t)$. El teorema de Fourier establece que esta función se puede escribir como

$$y(t) = \sum (A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t) \quad (18.13)$$

donde la frecuencia más baja es $f_1 = 1/T$. Las frecuencias más altas son múltiplos enteros de la fundamental, $f_n = nf_1$, y los coeficientes A_n y B_n representan las amplitudes de las diferentes ondas. La figura 18.19 de la página 554 representa un análisis armónico de los patrones de onda que se muestran en la figura 18.18. Cada barra en la gráfica representa uno de los términos en la serie en la ecuación 18.13 hasta $n = 9$. Note que un diapasón golpeado sólo produce un armónico (el primero), mientras que la flauta y el clarinete producen el primer armónico y muchos superiores.

Observe la variación en intensidad relativa de los diferentes armónicos para la flauta y el clarinete. En general, cualquier sonido musical consiste de una frecuencia

Prevención de riesgos ocultos 18.4

Tono contra frecuencia No confunda el término *tono* con *frecuencia*. La frecuencia es la medición física del número de oscilaciones por segundo. El tono es una reacción psicológica al sonido que permite a una persona colocar el sonido en una escala de alto a bajo o de agudo a grave. Por tanto, la frecuencia es el estímulo y el tono es la respuesta. Aunque el tono se relaciona principalmente (pero no por completo) con la frecuencia, no son lo mismo. Una frase como “el tono del sonido” es incorrecta, porque el tono no es una propiedad física del sonido.

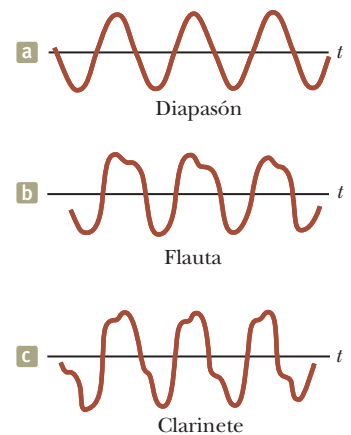


Figura 18.18 Patrones de onda sonora producidos por (a) un diapasón, (b) una flauta y (c) un clarinete, cada uno aproximadamente a la misma frecuencia.

Teorema de Fourier

² Desarrollada por Jean Baptiste Joseph Fourier (1786-1830).

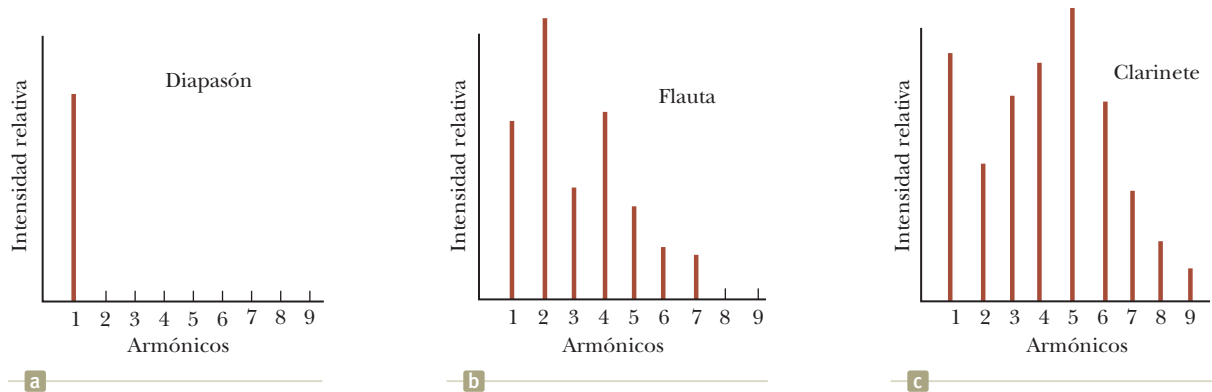


Figura 18.19 Armónicos de los patrones de onda que se muestran en la figura 18.18. Note las variaciones en intensidad de los diferentes armónicos. Los incisos (a), (b) y (c) corresponden a los de la figura 18.18.

fundamental f más otras frecuencias que son múltiplos enteros de f y todas tienen diferentes intensidades.

Se explicó el *análisis* de un patrón de onda con el uso del teorema de Fourier. El análisis implica la determinación de los coeficientes de los armónicos en la ecuación 18.13 a partir de un conocimiento del patrón de onda. El proceso inverso, llamado *síntesis de Fourier*, también se puede realizar. En este proceso, los diversos armónicos se suman para formar un patrón de onda resultante. Como ejemplo de la síntesis de Fourier, considere la construcción de una onda cuadrada, como se muestra en la figura 18.20. La simetría de la onda cuadrada sólo resulta en múltiplos impares de la frecuencia fundamental que se combina en su síntesis. En la figura 18.20a, la curva azul muestra la combinación de f y $3f$. En la figura 18.20b, se sumó $5f$ a la combinación y se obtuvo la curva verde. Observe cómo se aproxima la forma general de la onda cuadrada, aun cuando las porciones superior e inferior no son planas como debieran.

La figura 18.20c muestra el resultado de sumar frecuencias impares hasta $9f$. Esta aproximación (curva en rojo) a la onda cuadrada es mejor que las aproximaciones en las figuras 18.20a y 18.20b. Para aproximar la onda cuadrada tan cerca como sea posible se deben sumar todos los múltiplos impares de la frecuencia fundamental, hasta la frecuencia infinita.

Con el uso de tecnología moderna los sonidos musicales se pueden generar electrónicamente al mezclar diferentes amplitudes de cualquier número de armónicos. Estos sintetizadores musicales electrónicos ampliamente usados son capaces de producir una variedad infinita de tonos musicales.

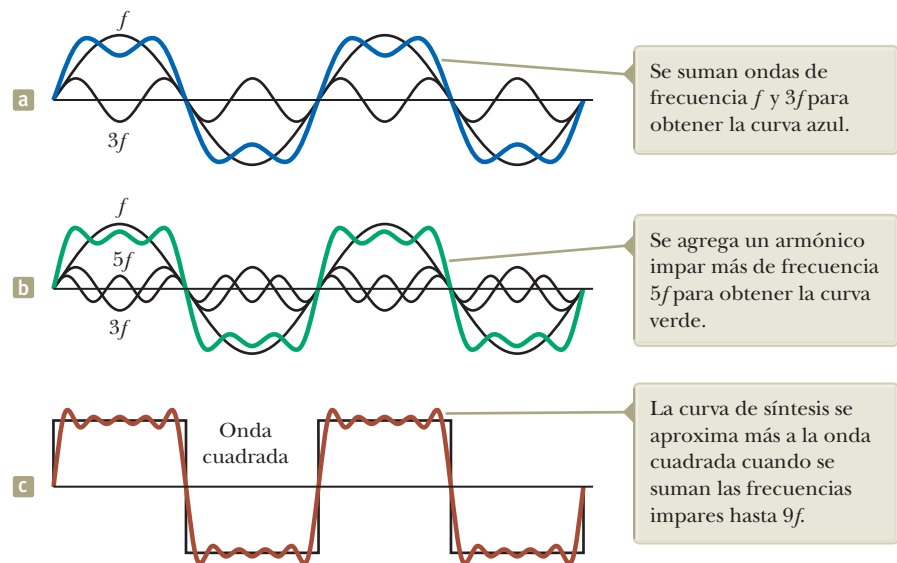


Figura 18.20 Síntesis de Fourier de una onda cuadrada que se representa mediante la suma de múltiplos impares del primer armónico, que tiene frecuencia f .

Resumen

Conceptos y principios

El **principio de superposición** especifica que cuando dos o más ondas se mueven a través de un medio el valor de la función de onda resultante es igual a la suma algebraica de los valores de las funciones de onda individuales.

El fenómeno de **batimiento** es la variación periódica en intensidad en un punto dado debido a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes. La **frecuencia de batimiento** es

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \quad (18.12)$$

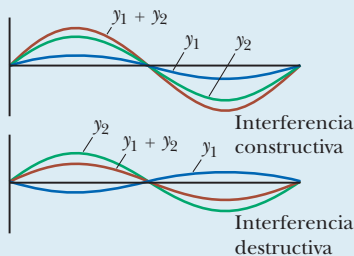
donde f_1 y f_2 son las frecuencias de las ondas individuales.

Las **ondas estacionarias** se forman a partir de la combinación de dos ondas sinusoidales que tienen la misma frecuencia, amplitud y longitud de onda, pero que viajan en direcciones opuestas. La onda estacionaria resultante se describe mediante la función de onda

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t \quad (18.1)$$

Por tanto, la amplitud de la onda estacionaria es $2A$, y la amplitud del movimiento armónico simple de cualquier partícula del medio varía de acuerdo con su posición como $2A \sin kx$. Los puntos de amplitud cero (llamados **nodos**) ocurren en $x = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Los puntos de amplitud máxima (llamados **antinodos**) ocurren en $x = n\lambda/4$ ($n = 1, 3, 5, \dots$). Los antinodos adyacentes están separados por una distancia $\lambda/2$. Los nodos adyacentes también están separados por una distancia $\lambda/2$.

Análisis de modelos para resolver problemas



Ondas en interferencia. Cuando se superponen dos ondas viajeras que tienen igual frecuencia, la onda resultante se describe por el **principio de superposición** y tiene una amplitud que depende del ángulo de fase ϕ entre las dos ondas. La **interferencia constructiva** ocurre cuando las dos ondas están en fase, lo que corresponde a $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ rad. La **interferencia destructiva** se presenta cuando las dos ondas están a 180° fuera de fase, lo que corresponde a $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ rad.

Ondas bajo condiciones de frontera. Cuando una onda está sujeta a condiciones de frontera, sólo se permiten ciertas frecuencias naturales; se dice que las frecuencias están cuantizadas.

Para ondas sobre una cuerda fija en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.6)$$

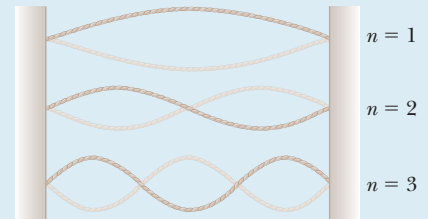
donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal.

Para ondas sonoras en una columna de aire abierta en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (18.8)$$

Si una columna de aire está abierta en un extremo y cerrada en el otro, sólo están presentes armónicos impares y las frecuencias naturales son

$$f_n = n \frac{v}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (18.9)$$



Preguntas objetivas

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

1. En la figura PO18.1, una onda sonora de 0.8 m de longitud de onda se divide en dos partes iguales que se recombinan para interferir constructivamente, con la diferencia original entre sus longitudes de trayectoria $|r_2 - r_1| = 0.8$ m. Clasifique las siguientes situaciones de acuerdo con la intensidad del sonido en el receptor, de mayor a menor. Suponga que las paredes del tubo no absorben energía sonora. Asigne clasificaciones idénticas a las situaciones en que la intensidad sea igual. (a) Desde su posición original la sección que se desliza se mueve 0.1 m. (b) A continuación se desliza 0.1 m adicionales. (c) Se desliza todavía otros 0.1 m. (d) Se desliza 0.1 m más.

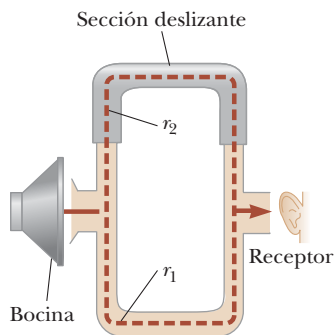


Figura PO18.1 Pregunta objetiva 1 y problema 6.

2. Una cuerda de longitud L , masa por unidad de longitud μ y tensión T está vibrando a su frecuencia fundamental. (i) Si la longitud de la cuerda se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? (a) Se vuelve dos veces mayor. (b) Se vuelve $\sqrt{2}$ veces mayor. (c) No cambia. (d) Se vuelve $1/\sqrt{2}$ veces mayor. (e) Resulta la mitad de larga. (ii) Si la masa por unidad de longitud se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? Elija entre las mismas posibilidades del inciso (i). (iii) Si la tensión se duplica y todos los otros factores se mantienen constantes, ¿cuál es el efecto sobre la frecuencia fundamental? Elija entre las mismas posibilidades del inciso (i).
3. En el ejemplo 18.1 se investigó un oscilador a 1.3 kHz que alimentaba dos bocinas idénticas lado a lado. Se encontró que un escucha en el punto O percibe el sonido con intensidad máxima, mientras que otro en el punto P percibe un mínimo. ¿Cuál es la intensidad en P ? (a) Menor pero cercana a la intensidad en O , (b) la mitad de la intensidad en O , (c) muy baja pero no cero, (d) cero, (e) indeterminada.
4. Una serie de pulsos, cada uno de 0.1 m de amplitud, se envían por una cuerda que está unida a un poste en un extremo. Los pulsos se reflejan en el poste y viajan de regreso a lo largo de la cuerda sin perder amplitud. (i) ¿Cuál es el desplazamiento neto en un punto sobre la cuerda donde dos pulsos se cruzan? Suponga que la cuerda está firmemente unida al poste. (a) 0.4 m, (b) 0.3 m, (c) 0.2 m, (d) 0.1 m, (e) 0. (ii) A continuación suponga que el extremo en el que se presenta la reflexión es libre de deslizarse hacia arriba y hacia abajo. Ahora, ¿cuál es el desplazamiento neto en un punto sobre la cuerda donde dos pulsos se cruzan? Elija su respuesta entre las mismas posibilidades del inciso (i).
5. Una flauta tiene una longitud de 58.0 cm. Si la rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s, ¿cuál es la frecuencia fundamental de la flauta, asumiendo que es un tubo cerrado en un extremo y abierto en el otro? (a) 148 Hz, (b) 296 Hz, (c) 444 Hz, (d) 591 Hz, (e) ninguna de esas respuestas.
6. Cuando dos diapasones suenan al mismo tiempo se produce una frecuencia de batimiento de 5 Hz. Si uno de los diapasones tiene una frecuencia de 245 Hz, ¿cuál es la frecuencia del otro diapason? (a) 240 Hz, (b) 242.5 Hz, (c) 247.5 Hz, (d) 250 Hz, (e) más de una respuesta podría ser correcta.
7. Se sabe que un diapason oscila con 262 Hz de frecuencia. Cuando se hace sonar junto con una cuerda de mandolina, se escuchan cuatro batimientos cada segundo. A continuación, en cada punta del diapason se pone un trozo de cinta adhesiva y ahora el diapason produce cinco batimientos por segundo, con la misma cuerda de mandolina. ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda? (a) 257 Hz, (b) 258 Hz, (c) 262 Hz, (d) 266 Hz, (e) 267 Hz.
8. Un arquero dispara una flecha horizontalmente desde el centro de la cuerda de un arco que se mantiene vertical. Después que la flecha la deja, la cuerda del arco vibra como una sobreposición, ¿de qué armónicos de onda estacionaria? (a) Sólo vibra en el armónico número 1, el fundamental. (b) Sólo vibra en el segundo armónico. (c) Sólo vibra en los armónicos de número impar 1, 3, 5, 7, ... (d) Sólo vibra en los armónicos de número par 2, 4, 6, 8, ... (e) Vibra en todos los armónicos.
9. A medida que los pulsos de la misma forma (uno hacia arriba, el otro hacia abajo), móviles en direcciones opuestas sobre una cuerda, pasan uno sobre el otro, en un instante particular la cuerda no muestra desplazamiento de la posición de equilibrio en algún punto. ¿Qué ocurrió con la energía que portaban los pulsos en ese instante de tiempo? (a) Se usó para producir el movimiento previo. (b) Toda es energía potencial. (c) Toda es energía interna. (d) Toda es energía cinética. (e) La energía positiva de un pulso suma cero con la energía negativa del otro pulso.
10. Una onda estacionaria tiene tres nodos que se establecen en una cuerda fija en ambos extremos. Si se duplica la frecuencia de la onda, ¿cuántos antinodos tendrá? (a) 2, (b) 3, (c) 4, (d) 5, (e) 6.
11. Suponga que las seis cuerdas de una guitarra acústica se tocan sin pulsar, es decir, sin presionarlas contra los trastes. ¿Qué cantidades son iguales para las seis cuerdas? Elija toda respuesta correcta. (a) La frecuencia fundamental, (b) la longitud de onda fundamental de la onda de la cuerda, (c) la longitud de onda fundamental del sonido emitido, (d) la rapidez de la onda en la cuerda, (e) la rapidez del sonido emitido.
12. Suponga que dos ondas sinusoidales idénticas se mueven a través del mismo medio en la misma dirección. ¿Bajo qué condición la amplitud de la onda resultante será mayor que cualquiera de las dos ondas originales? (a) En todos los casos, (b) sólo si las ondas no tienen diferencia en fase, (c) sólo si la diferencia de fase es menor que 90° , (d) sólo si la diferencia de fase es menor que 120° , (e) sólo si la diferencia de fase es menor que 180° .

Preguntas conceptuales

1. indica que la respuesta está disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

- Un modelo burdo de la garganta humana es un tubo abierto en ambos extremos con una fuente vibrante para introducir el sonido en el tubo en un extremo. Suponiendo que la fuente vibrante produce un rango de frecuencias, analice el efecto de cambiar la longitud del tubo.
- Cuando dos ondas interfieren constructiva o destructivamente, ¿hay alguna ganancia o pérdida en energía? Explique.
- Explique cómo un instrumento musical, un piano, se puede afinar a partir del fenómeno de los batimientos.
- ¿Qué limita la amplitud de movimiento de un sistema vibratorio real que es activado a una de sus frecuencias de resonancia?
- Un diapasón por sí mismo produce un sonido débil. Explique cómo se puede usar cada uno de los siguientes cuatro métodos para obtener un sonido más fuerte de él. Explique también cualquier efecto en el intervalo de tiempo para el que el diapasón vibra de manera audible. (a) Sostenga el borde de una hoja de papel contra una punta en vibración. (b) Presione el mango del diapasón contra un pizarro o mesa. (c) Sostenga el diapasón sobre una columna de aire de longitud adecuada, como en el ejemplo 18.6. (d) Sostenga el diapasón cerca de una ranura abierta cortada en una hoja de foamy o de cartón (con una ranura similar en tamaño y forma a una punta del diapasón y moviendo las puntas perpendiculares a la hoja).
- Un mecánico de aviación nota que el sonido de un avión de dos motores varía rápidamente en sonoridad cuando ambos motores están en marcha. ¿Qué podría causar esta vibración de fuerte a suave?
- A pesar de una mano razonablemente estable, con frecuencia una persona derrama su café cuando lo lleva a su asiento. Explique la resonancia como una posible causa de esta dificultad e imagine medios para evitar los derrames.
- Una botella de refresco resuena si se sopla aire en su parte superior. ¿Qué sucede con la frecuencia de resonancia conforme el nivel de líquido en la botella disminuye?
- ¿El fenómeno de interferencia de onda se aplica sólo a ondas sinusoidales?

Problemas

1. sencillo; 2. intermedio; 3. desafiante

1. solución completa disponible en el *Manual de soluciones del estudiante/Guía de estudio*

Nota: A menos que se especifique lo contrario, tome la rapidez del sonido en el aire como 343 m/s, su valor a una temperatura del aire de 20.0°C. En cualquier otra temperatura en grados Celsius T_C , la rapidez del sonido en el aire es descrita por

$$v = 331 \sqrt{1 + \frac{T_C}{273}}$$

donde v está en m/s y T está en °C.

Sección 18.1 Análisis de modelo: ondas en interferencia

- Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda estirada. Las ondas están 90.0° fuera de fase. Cada onda tiene una amplitud de 4.00 cm. Encuentre la amplitud de la onda resultante.
- Dos pulsos A y B se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensa con una rapidez $v = 2.00$ cm/s. La amplitud de A es el doble de la amplitud de B. Los pul-

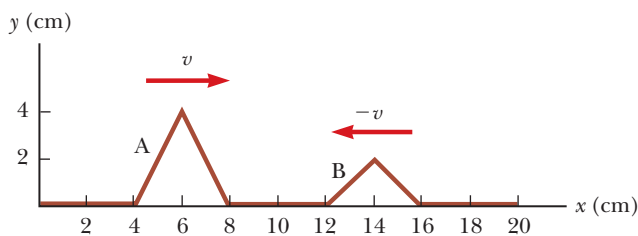


Figura P18.2

sos se muestran en la figura P18.2 en $t = 0$. Bosqueje la onda resultante en $t = 1.00$ s, 1.50 s, 2.00 s, 2.50 s y 3.00 s.

- Dos ondas sobre una cuerda se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = 3.0 \cos(4.0x - 1.6t) \quad y_2 = 4.0 \sin(5.0x - 2.0t)$$

donde x y y están en centímetros y t está en segundos. Determine la sobreposición de las ondas $y_1 + y_2$ en los puntos (a) $x = 1.00$, $t = 1.00$; (b) $x = 1.00$, $t = 0.500$, y (c) $x = 0.500$, $t = 0$. *Nota:* recuerde que los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.

- Dos pulsos de diferentes amplitudes se acercan mutuamente, cada uno con una rapidez $v = 1.00$ m/s. La figura P18.4 muestra las posiciones de los pulsos en el tiempo $t = 0$. (a) Bosqueje la onda resultante en $t = 2.00$ s, 4.00 s, 5.00 s y 6.00 s. (b) ¿Qué pasaría si? Si se invierte el pulso a la derecha, ¿cómo cambiarían sus dibujos de la onda resultante?

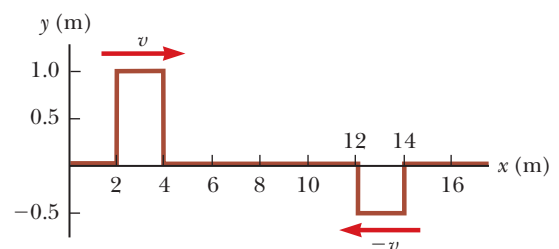


Figura P18.4

- Un diapasón genera ondas de sonido con una frecuencia de 246 Hz. Las ondas viajan en direcciones opuestas a lo

largo de un pasillo, son reflejadas por las paredes laterales y regresan. El pasillo tiene 47.0 m de largo y el diapason está situado a 14.0 m de uno de los extremos. ¿Cuál es la diferencia de fase entre las ondas reflejadas cuando se encuentran en el diapason vibratorio? La rapidez del sonido en el aire es de 343 m/s.

6. El sistema acústico que se muestra en la figura PO18.1 es activado por una bocina que emite sonido de frecuencia 756 Hz. (a) Si la interferencia constructiva se produce en un lugar particular de la sección deslizante, qué distancia mínima debe deslizarse la sección moviéndose hacia arriba para que ocurra interferencia destructiva en ese lugar? (b) Qué distancia mínima desde la posición original de la sección deslizante debe deslizarse para que otra vez pueda haber interferencia constructiva?

7. Dos pulsos que viajan sobre la misma cuerda se describen mediante

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \quad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

(a) ¿En qué dirección viaja cada pulso? (b) ¿En qué instante los dos se cancelan en todas partes? (c) ¿En qué punto los pulsos siempre se cancelan?

8. Dos bocinas idénticas se colocan en una pared separadas 2.00 m. Un escucha está de pie a 3.00 m de la pared, directamente enfrente de una de las bocinas. Un solo oscilador activa las bocinas a una frecuencia de 300 Hz. (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la cual el oscilador se ajusta de tal modo que el observador escuche sonido mínimo?

9. Dos ondas sinusoidales viajeras están descritas por las funciones de onda

$$y_1 = 5.00 \sin [\pi(4.00x - 1200t)]$$

$$y_2 = 5.00 \sin [\pi(4.00x - 1200t - 0.250)]$$

donde x , y_1 y y_2 están en metros y t en segundos. (a) ¿Cuál es la amplitud de la función de onda resultante $y_1 + y_2$? (b) ¿Cuál es la frecuencia de la onda resultante?

10. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de 200 Hz de frecuencia. Las bocinas se ubican en el suelo a una distancia de 4.00 m una de la otra. Un hombre camina directo hacia la bocina de la derecha como se muestra en la figura P18.10. Después de escuchar tres mínimos en la intensidad sonora, camina hacia el siguiente máximo y se detiene. Ignore cualquier reflexión de sonido producida por el suelo.

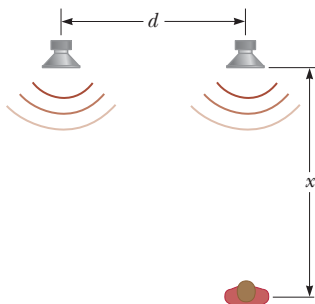


Figura P18.10

11. Dos ondas sinusoidales en una cuerda están descritas por las funciones de onda

$$y_1 = 2.00 \sin (20.0x - 32.0t) \quad y_2 = 2.00 \sin (25.0x - 40.0t)$$

donde x , y_1 y y_2 están en centímetros y t en segundos.

- (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto $x = 5.00$ cm en $t = 2.00$ s? (b) ¿Cuál es el valor x positivo más cercano al origen para el que las dos fases difieran por $\pm\pi$ en $t = 2.00$ s? (Ésta es una posición donde las dos ondas suman cero.)
12. Dos ondas sinusoidales idénticas con longitudes de onda de 3.00 m viajan en la misma dirección con una rapidez de 2.00 m/s. La segunda onda se origina en el mismo punto como la primera, pero en un tiempo después. La amplitud de la onda resultante es igual a la de cada una de las dos ondas iniciales. Determine el intervalo de tiempo mínimo posible entre los momentos en que parten las dos ondas.
13. Dos bocinas idénticas separadas 10.0 m son activadas por el mismo oscilador con una frecuencia $f = 21.5$ Hz (figura P18.13) en una zona donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. (a) Demuestre que un receptor en el punto A registra un mínimo de intensidad del sonido de las dos bocinas. (b) Si el receptor se mueve en el plano de los altavoces, muestre que la trayectoria que debe seguir para mantener en un mínimo las intensidades a lo largo de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ (mostrada en rojo en la figura P18.13). (c) ¿Puede el receptor permanecer en un mínimo y alejarse de las dos fuentes? Si es así, determine la forma limitante de la trayectoria que debe tomar. Si no es así, explique qué tanto se puede alejar.

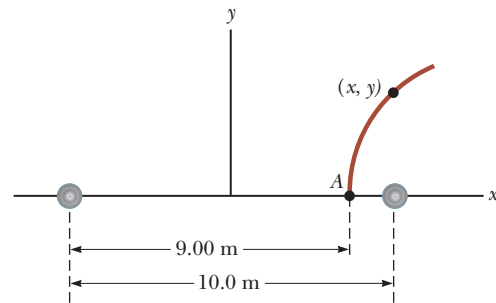


Figura P18.13

Sección 18.2 Ondas estacionarias

14. Dos ondas simultáneamente presentes sobre una cuerda larga tienen una diferencia de fase ϕ entre ellas de modo que una onda formada a partir de su combinación esté descrita por

$$y(x, t) = 2A \sin \left(kx + \frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\omega t - \frac{\phi}{2} \right)$$

(a) A pesar de la presencia del ángulo de fase ϕ , ¿es cierto que los nodos están separados por media longitud de onda? Explique. (b) ¿Son los nodos diferentes de alguna manera de lo que serían si ϕ fuera cero? Explique.

15. Dos ondas sinusoidales que viajan en direcciones opuestas interfieren para producir una onda estacionaria con la función de onda

$$y = 1.50 \sin (0.400x) \cos (200t)$$

donde x y y están en metros, y t en segundos. Determine (a) la longitud de onda, (b) la frecuencia y (c) la rapidez de las ondas que interfieren.

16. Verifique por sustitución directa que la función de onda para una onda estacionaria dada en la ecuación 18.1,

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

es una solución de la ecuación de onda lineal general, la ecuación 16.27:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

17. Dos ondas sinusoidales transversales que se combinan en un medio se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = 3.00 \sin \pi(x + 0.600t) \quad y_2 = 3.00 \sin \pi(x - 0.600t)$$

donde x , y_1 y y_2 están en centímetros, y t en segundos. Determine la máxima posición transversal de un elemento del medio en (a) $x = 0.250$ cm, (b) $x = 0.500$ cm y (c) $x = 1.50$ cm. (d) Encuentre los tres valores más pequeños de x que correspondan a antinodos.

18. Una onda estacionaria está descrita por la función de onda

$$y = 6 \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \cos (100\pi t)$$

donde x y y están en metros, y t en segundos. (a) Prepare una gráfica que muestre y como función de x para $t = 0$, para $t = 5$ ms, para $t = 10$ ms, para $t = 15$ ms y para $t = 20$ ms. (b) A partir de la gráfica identifique la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. (c) A partir de la gráfica identifique la frecuencia de la onda y explique cómo lo hizo. (d) A partir de la ecuación identifique directamente la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. (e) A partir de la ecuación identifique directamente la frecuencia y explique cómo lo hizo.

19. Dos bocinas idénticas se activan en fase mediante un oscilador común a 800 Hz y se enfrentan mutuamente a una distancia de 1.25 m. Ubique los puntos a lo largo de la línea que une las dos bocinas donde se esperarían mínimos relativos de amplitud de presión sonora.

Sección 18.3 Análisis de modelo: ondas bajo condiciones de frontera

20. Se establece una onda en una cuerda de 120 cm de longitud fijada en ambos extremos. La cuerda vibra en cuatro segmentos cuando se activa a 120 Hz. (a) Determine la longitud de onda. (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de la cuerda?

21. Una cuerda con masa $m = 8.00$ g y longitud $L = 5.00$ m tiene un extremo unido a una pared y el otro extremo pasa sobre una pequeña polea fija a una distancia $d = 4.00$ m de la pared y se amarra a un objeto colgante con una masa $M = 4.00$ kg, como en la figura P18.21. Si la parte horizontal de la cuerda se pulsa, ¿cuál es la frecuencia fundamental de su vibración?

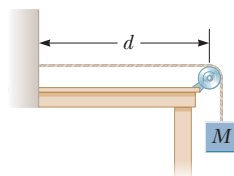


Figura P18.21

22. La cuerda superior de una guitarra tiene una frecuencia fundamental de 330 Hz cuando se le permite vibrar

como un todo, a lo largo de su longitud de 64.0 cm desde el cuello al puente. Un traste se proporciona para limitar la vibración sólo a los dos tercios inferiores de la cuerda. (a) Si la cuerda se presiona en este traste y se pulsa, ¿cuál es la nueva frecuencia fundamental? (b) ¿Qué pasaría si? El guitarrista puede pulsar un “armónico natural” al tocar suavemente la cuerda en la posición de este traste y pulsar la cuerda a aproximadamente un sexto del camino a lo largo de su longitud desde el puente. ¿Qué frecuencia se escuchará entonces?

23. La cuerda La en un chelo vibra en su primer modo normal con una frecuencia de 220 Hz. El segmento vibrante tiene 70.0 cm de largo y una masa de 1.20 g. (a) Encuentre la tensión en la cuerda. (b) Determine la frecuencia de vibración cuando la cuerda oscila en tres segmentos.

24. Una cuerda tensada tiene una longitud de 2.60 m y se fija en ambos extremos. (a) Encuentre la longitud de onda del modo fundamental de vibración de la cuerda. (b) ¿Puede encontrar la frecuencia de este modo? Explique por qué sí o por qué no.

25. Una cuerda vibrante dada en un piano tiene una longitud de 74.0 cm y forma una onda que tiene dos antinodos. (a) ¿Qué armónico representa esta onda? (b) Determine la longitud de onda de esta onda. (c) ¿Cuántos nodos hay en el patrón de onda?

26. Una cuerda que tiene 30.0 cm de largo y una masa por unidad de longitud de 9.00×10^{-3} kg/m se estira a una tensión de 20.0 N. Encuentre (a) la frecuencia fundamental y (b) las siguientes tres frecuencias que podrían causar los patrones de onda estacionaria en la cuerda.

27. En el arreglo que se muestra en la figura P18.27, un objeto se puede colgar de una cuerda (con densidad de masa lineal $\mu = 0.00200$ kg/m) que pasa sobre una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante f) y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es $L = 2.00$ m. Cuando la masa m del objeto es 16.0 kg o 25.0 kg, se observan ondas estacionarias; sin embargo, no se observan ondas estacionarias con alguna masa entre estos valores. (a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? *Nota:* mientras mayor es la tensión en la cuerda, menor es el número de nodos en la onda estacionaria. (b) ¿Cuál es la masa más grande del objeto con el cual se podrían observar ondas estacionarias?

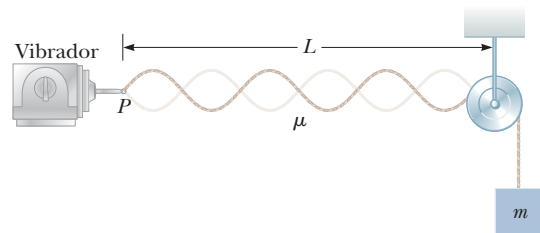


Figura P18.27 Problemas 27 y 28.

28. En el arreglo que se muestra en la figura P18.27, un objeto de masa $m = 5.00$ kg cuelga de una cuerda alrededor de una polea ligera. La longitud del cable entre la polea y el punto P es $L = 2.00$ m. (a) Cuando el vibrador se ajusta a una frecuencia de 150 Hz se forma una onda estacionaria con seis bucles. ¿Cuál debe ser la densidad de masa lineal de la cuerda? (b) ¿Cuántos bucles (si existen) se produci-

rán si m se cambia a 45.0 kg?
(c) ¿Cuántos bucles (si existen) se producirá si m se cambia a 10.0 kg?

29. Problema de repaso.

Una esfera de masa $M = 1.00$ kg se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una polea en el extremo de una barra horizontal ligera de longitud $L = 0.300$ m (figura P18.29). La cuerda hace un ángulo $\theta = 35^\circ$ con la barra. La frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra es $f = 60.0$ Hz. Determine la masa de esta porción de la cuerda arriba de la barra.

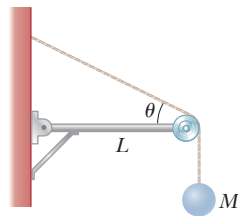


Figura P18.29
Problemas 29 y 30.

30. Problema de repaso. Una esfera de masa M se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una polea en el extremo de una barra horizontal ligera de longitud L (figura P18.29). La cuerda hace un ángulo θ con la barra. La frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra es f . Determine la masa de esta porción de la cuerda arriba de la barra.

31. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y se afina en Sol concierto, con $f_G = 392$ Hz. (a) ¿Dónde debe colocar su dedo el violinista para tocar La concierto, con $f_A = 440$ Hz? (b) Si esta posición permanece correcta a un medio del ancho de un dedo (es decir, dentro de 0.600 cm), ¿cuál es el máximo cambio porcentual permisible en la tensión de la cuerda?

32. Problema de repaso. Un objeto de cobre cuelga en la parte baja de un alambre de acero de masa despreciable. El extremo superior del alambre está fijo. Cuando el alambre se golpea, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Después el objeto de cobre se sumerge en agua de modo que la mitad de su volumen está abajo de la línea del agua. Determine la nueva frecuencia fundamental.

33. Se observa un patrón de onda estacionaria en un alambre fino con una longitud de 3.00 metros. La función de onda es

$$y = 0.00200 \sin(\pi x) \cos(100\pi t)$$

donde x y y están en metros, y t en segundos. (a) ¿Cuántos bucles muestra este patrón? (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de vibración del alambre? (c) ¿Qué pasaría si? Si la frecuencia original se mantiene constante y aumenta la tensión en el cable por un factor de 9, ¿cuántos bucles están presentes en el nuevo patrón?

Sección 18.4 Resonancia

34. La Bahía de Fundy, en Nueva Escocia, tiene las mareas más altas del mundo. Suponga que en medio del océano y en la boca de la bahía el gradiente de gravedad de la Luna y la rotación de la Tierra hacen que la superficie del agua oscile con una amplitud de unos cuantos centímetros y un periodo de 12 h 24 min. En el nacimiento de la bahía, la amplitud es de varios metros. Suponga que la bahía tiene una longitud de 210 km y una profundidad uniforme de 36.1 m. La rapidez de las ondas acuáticas de longitud de onda larga está dada por $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad del agua. Argumente a favor o en contra de la proposición de que la marea se amplifica por resonancia de ondas estacionarias.

35. Un terremoto puede producir un *seiche* (oscilación de un cuerpo fluido) en un lago en el que el agua se derrama de ida y vuelta de un extremo al otro con amplitud notablemente grande y periodo largo. Considere un seiche producido en el estanque rectangular de una granja. Suponga que el estanque tiene 9.15 m de largo con ancho y profundidad uniformes. Usted mide que un pulso producido en un extremo llega al otro extremo en 2.50 s. (a) ¿Cuál es la rapidez de la onda? (b) ¿Cuál debería ser la frecuencia del movimiento de tierra durante el terremoto para producir un seiche que es una onda con antinodos en cada extremo del estanque y un nodo en el centro?

36. Se puede utilizar sonido de alta frecuencia para producir vibraciones de ondas estacionarias en una copa de vino. Se observa que una onda estacionaria de vibración en un vaso de vino tiene cuatro nodos y cuatro antinodos equidistantes alrededor de la circunferencia de 20.0 cm del borde de la copa. Si las ondas transversales se mueven alrededor de la copa a 900 m/s, ¿con qué frecuencia tendría que cantar una cantante de ópera para producir un armónico alto para romper la copa con una vibración resonante, como se muestra en la figura P18.36?



Figura P18.36

Sección 18.5 Ondas estacionarias en columnas de aire

37. La tráquea de una grulla blanca típica es de 5.00 pies de largo. ¿Cuál es la frecuencia resonante fundamental de la tráquea del ave, modelada como un tubo estrecho cerrado en un extremo? Tome una temperatura de 37°C .

38. Si un conducto auditivo humano puede ser pensado como que se parece a un tubo de órgano, cerrado en un extremo, que resuena en una frecuencia fundamental de 3 000 Hz, ¿cuál es la longitud del canal? Utilice una temperatura corporal normal de 37°C para determinar la rapidez del sonido en el canal.

39. Calcule la longitud de un tubo que tiene una frecuencia fundamental de 240 Hz, si supone que el tubo está (a) cerrado en un extremo y (b) abierto en ambos extremos.

40. La longitud global de un flautín es de 32.0 cm. La columna de aire resonante vibra como en un tubo abierto en ambos extremos. (a) Encuentre la frecuencia de la nota más baja que puede producir un flautín. (b) Abrir orificios en el lado acorta efectivamente la longitud de la columna resonante. Suponga que la nota más alta que un flautín puede producir es de 4 000 Hz. Encuentre la distancia entre antinodos adyacentes para este modo de vibración.

41. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano abierto corresponde al Do medio (261.6 Hz en la escala cromática musical). La tercera resonancia de un tubo de órgano cerrado tiene la misma frecuencia. ¿Cuál es la longitud de (a) el tubo abierto? y (b) el tubo cerrado?

42. El tubo más largo en un determinado órgano mide 4.88 m. ¿Cuál es la frecuencia fundamental (a 0.00°C) si el tubo es (a) cerrado en un extremo y (b) abierto en los dos extremos. (c) ¿Cuáles serán las frecuencias a 20.0°C ?

43. Una columna de aire en un tubo de vidrio está abierta en un extremo y cerrada en el otro mediante un pistón móvil. El aire en el tubo se calienta arriba de la temperatura ambiente y un diapasón de 384 Hz se mantiene en el extremo abierto. Cuando el pistón está a $d_1 = 22.8$ cm del extremo abierto se escucha resonancia y, una vez más, cuando está a $d_2 = 68.3$ cm del extremo abierto. (a) ¿Qué rapidez de sonido se implica con estos datos? (b) ¿A qué distancia del extremo abierto estará el pistón cuando se escuche la siguiente resonancia?

44. Un diapasón con una frecuencia de $f = 512$ Hz se coloca cerca de lo alto del tubo que se muestra en la figura 18.44. El nivel del agua se baja de modo que la longitud L aumenta lentamente desde un valor inicial de 20.0 cm. Determine los siguientes dos valores de L que correspondan a modos resonantes.

45. Con una pulsación particular, una flauta produce una nota con frecuencia de 880 Hz a 20.0°C . La flauta está abierta en ambos extremos. (a) Encuentre la longitud de la columna de aire. (b) Encuentre la frecuencia que produce la flauta al inicio del espectáculo de medio tiempo en un juego de fútbol americano de final de temporada, cuando la temperatura ambiente es de -5.00°C y el músico no tiene oportunidad de calentar la flauta. Encuentre la frecuencia que produce la flauta bajo estas condiciones.

46. El casillero de una ducha tiene dimensiones de $86.0\text{ cm} \times 86.0\text{ cm} \times 210\text{ cm}$. Suponga que el casillero actúa como un tubo cerrado en ambos extremos, con nodos en lados opuestos. Suponga que las voces de diferentes cantantes varían de 130 Hz a 2 000 Hz. Sea 355 m/s la rapidez del sonido en el aire caliente. Para alguien cantando en la ducha, qué frecuencias parecerán más ricas (debido a la resonancia).

47. Un tubo de vidrio (abierto en ambos extremos) de longitud L se coloca cerca de una bocina de audio de frecuencia $f = 680$ Hz. ¿Para qué valores de L resonará el tubo con la bocina?

48. Un túnel bajo un río tiene 2.00 km de largo. (a) ¿A qué frecuencia puede resonar el aire en el túnel? (b) Explique si sería bueno hacer una regla contra tocar el claxon de su automóvil cuando está en el túnel.

49. Como se muestra en la figura P18.49, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico $R = 1.00\text{ L/min}$. El radio del cilindro es $r = 5.00\text{ cm}$ y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia $f = 512$ Hz. A medida que el agua asciende,

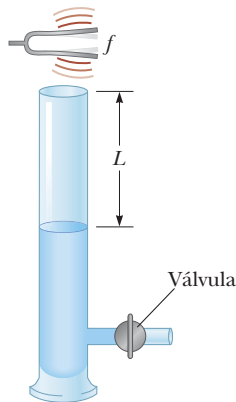


Figura P18.44

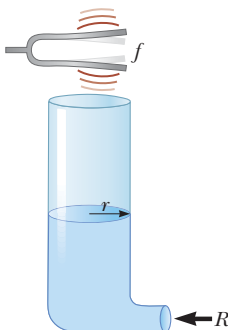


Figura P18.49

Problemas 49 y 50.

¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

50. Como se muestra en la figura P18.49, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico R . El radio del cilindro es r y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia f . A medida que el agua asciende, ¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?
51. Dos frecuencias naturales adyacentes de un tubo de órgano se determinan en 550 Hz y 650 Hz. Calcule (a) la frecuencia fundamental y (b) la longitud de este tubo.
52. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un estudiante está escuchando los sonidos de una columna de aire que tiene 0.730 m de largo. No sabe si la columna está abierta en ambos extremos o abierta en un solo extremo. Oye resonancia de la columna de aire con frecuencias 235 Hz y 587 Hz.
53. Un estudiante usa un oscilador de audio de frecuencia ajustable para medir la profundidad de un pozo de agua. El estudiante reporta que escucha dos resonancias sucesivas a 51.87 Hz y 59.85 Hz. (a) ¿Qué tan profundo es el pozo? (b) ¿Cuántos antinodos hay en la onda estacionaria a 51.87 Hz?

Sección 18.6 Ondas estacionarias en barras y membranas

54. Una barra de aluminio se sujeta a una cuarta parte a lo largo de su longitud y se pone en vibración longitudinal mediante una fuente impulsora de frecuencia variable. La frecuencia más baja que produce resonancia es 4 400 Hz. La rapidez del sonido en una barra de aluminio es 5 100 m/s. Determine la longitud de la barra.
55. Una barra de aluminio de 1.60 m de largo se mantiene en su centro. Se golpea con un paño recubierto con resina para establecer una vibración longitudinal. La rapidez del sonido en una delgada barra de aluminio es de 5 100 m/s. (a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de las ondas establecidas en la barra? (b) ¿Qué armónicos se establecen en la barra sostenida de esta forma? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si la barra fuese de cobre, material en el que la rapidez del sonido es de 3 560 m/s?

Sección 18.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

56. Mientras intenta afinar la nota Do a 523 Hz, un afinador de pianos escucha 2.00 batimientos/s entre un oscilador de referencia y la cuerda. (a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda? (b) Cuando aprieta la cuerda ligeramente, escucha 3.00 batimientos/s. ¿Ahora cuál es la frecuencia de la cuerda? (c) ¿En qué porcentaje el afinador debe cambiar la tensión en la cuerda para que quede afinada?
57. En ciertos intervalos de un teclado de piano, más de una cuerda se afina a la misma nota para proporcionar sonoridad adicional. Por ejemplo, la nota a 110 Hz tiene dos cuerdas a esta frecuencia. Si una cuerda se desliza de su tensión normal de 600 N a 540 N, ¿qué frecuencia de batimiento se escucha cuando el martillo golpea las dos cuerdas simultáneamente?
58. **Problema de repaso.** Jane espera en una plataforma del ferrocarril mientras dos trenes se aproximan desde la misma dirección a rapidezces iguales de 8.00 m/s. Ambos trenes están soplando sus silbatos (que tienen la misma

frecuencia), y un tren está a cierta distancia detrás del otro. Después que el primer tren pasa a Jane, pero antes que el segundo tren pase, escucha batimientos de frecuencia 4.00 Hz. ¿Cuál es la frecuencia de los silbidos del tren?

- 59. Problema de repaso.** Un estudiante sostiene un diapason que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared con una rapidez constante de 1.33 m/s. (a) ¿Qué frecuencia de batimiento observa entre el diapason y su eco? (b) ¿Qué tan rápido debe caminar alejándose de la pared para observar una frecuencia de batimiento de 5.00 Hz?

Sección 18.8 Patrones de onda no sinusoidales

- 60.** Un acorde La mayor consiste de las notas llamadas La, Do sostenido y Mi. Se puede ejecutar en un piano al golpear simultáneamente las cuerdas con frecuencias fundamentales de 440.00 Hz, 554.37 Hz y 659.26 Hz. La magnífica consonancia del acorde se asocia con igualdad cercana de las frecuencias de algunos de los armónicos más altos de los tres tonos. Considere los primeros cinco armónicos de cada cuerda y determine cuáles armónicos muestran casi igualdad.
- 61.** Suponga que un flautista ejecuta una nota Do de 523 Hz con amplitud de desplazamiento del primer armónico $A_1 = 100$ nm. A partir de la figura 18.19b, lea, por proporción, las amplitudes de desplazamiento de los armónicos del 2 al 7. Considérelas como los valores del A_2 al A_7 en el análisis de Fourier del sonido y suponga $B_1 = B_2 = \dots = B_7 = 0$. Construya una gráfica de la forma de onda del sonido. Su forma de onda no se parecerá exactamente a la forma de onda de flauta de la figura 18.18b porque usted simplifica al ignorar los términos coseno; no obstante, produce la misma sensación a la audición humana.

Problemas adicionales

- 62.** Un tubo abierto en ambos extremos tiene una frecuencia fundamental de 300 Hz cuando la temperatura es de 0°C . (a) ¿Cuál es la longitud del tubo? (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental a una temperatura de 30.0°C ?
- 63.** Una cuerda tiene 0.400 m de largo y tiene una masa por unidad de longitud de 9.00×10^{-3} kg/m. ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda si su segundo armónico tiene la misma frecuencia que el segundo modo de resonancia de 1.75 m de un tubo largo abierto en un extremo?
- 64.** Dos cuerdas vibran en la misma frecuencia de 150 Hz. Después que se disminuye la tensión en una de las cuerdas, un observador oye cuatro batimientos por segundo cuando las cuerdas vibran juntas. Determine la nueva frecuencia en la cuerda ajustada.
- 65.** La lancha de la figura P18.65 viaja a lo largo de una línea recta paralela a la costa y a una distancia $d = 600$ m de

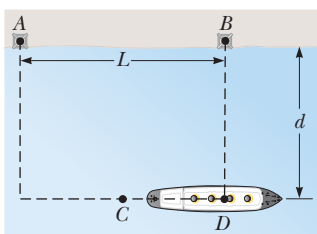


Figura P18.65

ésta. El radio de la lancha recibe señales simultáneas de la misma frecuencia de antenas A y B, separadas una distancia $L = 800$ m. Las señales interfieren constructivamente en el punto C, que es equidistante de la A y B. La señal enviada por el primer mínimo en el punto D, es directamente hacia fuera de la orilla del punto B. Determine la longitud de onda de las ondas de radio.

- 66.** Un alambre de 2.00 m de largo con una masa de 0.100 kg se fija en ambos extremos. La tensión en el cable se mantiene en 20.0 N. (a) ¿Cuáles son las frecuencias de los tres primeros modos permitidos de vibración? (b) Si un nodo se observa en un punto a 0.400 m de uno de los extremos, ¿en qué modo y con qué frecuencia vibra?
- 67.** El traste más cercano al puente en una guitarra está a 21.4 cm del puente, como se muestra en la figura P18.67. Cuando se presiona la cuerda más delgada en este primer traste, produce la frecuencia más alta que se puede tocar en la guitarra, 2 349 Hz. La siguiente nota más baja que se produce en la cuerda tiene frecuencia de 2 217 Hz. ¿A qué distancia del primer traste debe estar el siguiente traste?

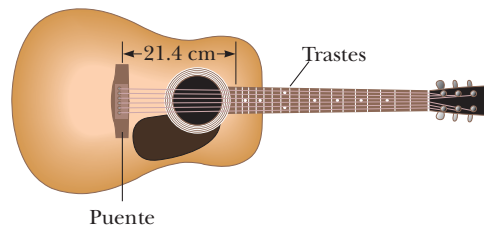


Figura P18.67

- 68.** Una cuerda fija en ambos extremos y que tiene una masa de 4.80 g, una longitud de 2.00 m y una tensión de 48.0 N vibra en su segundo modo normal ($n = 2$). (a) ¿Es mayor o menor la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante que la longitud de onda de la onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la razón entre la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante y la longitud de onda de la onda en la cuerda?
- 69.** Un reloj de cuarzo contiene un oscilador de cristal en forma de bloque de cuarzo que vibra mediante contracción y expansión. Un circuito eléctrico alimenta energía para mantener la oscilación y también cuenta los pulsos de voltaje para mantener el tiempo. Dos caras opuestas del bloque, separadas 7.05 mm, son antinodos, y se mueven de manera alterna acercándose y alejándose mutuamente. El plano a la mitad entre estas dos caras es un nodo de la vibración. La rapidez del sonido en el cuarzo es de 3.70×10^3 m/s. Encuentre la frecuencia de la vibración.
- 70. Problema de repaso.** Para el arreglo que se muestra en la figura P18.70, el plano inclinado y la pequeña polea no tie-

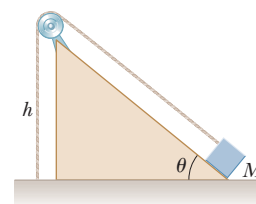


Figura P18.70

nen fricción, la cuerda soporta el objeto de masa M en el fondo del plano y la cuerda tiene masa m . El sistema está en equilibrio y la parte vertical de la cuerda tiene una longitud h . Queremos estudiar las ondas que se establecen en la sección vertical de la cuerda. (a) ¿Qué análisis de modelo describe al objeto de masa M ? (b) ¿Qué análisis de modelo describe las ondas en la parte vertical de la cuerda? (c) Encuentre la tensión en la cuerda. (d) Modele la forma de la cuerda como un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud total de la cuerda. (e) Determine la masa por unidad de longitud de la cuerda. (f) Encuentre la rapidez de las ondas en la cuerda. (g) Halle la frecuencia más baja para una onda estacionaria. (h) Evalúe este resultado para $M = 1.50$ kg, $m = 0.750$ g, $h = 0.500$ m y $\theta = 30.0^\circ$. (i) Determine el valor numérico de la frecuencia más baja para una onda en la sección inclinada de la cuerda.

71. Un alambre de 0.0100 kg, 2.00 m de largo, se fija en ambos extremos y vibra en su modo más simple bajo una tensión de 200 N. Cuando se coloca un diapasón vibrante cerca del cable se escucha una frecuencia de batimiento de 5.00 Hz. (a) ¿Cuál podría ser la frecuencia del diapasón vibratorio? (b) ¿Cuál sería la tensión en el cable si los batimientos desaparecen?
72. Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de frecuencia f . Las bocinas se ubican a una distancia d una de otra sobre un poste vertical. Un hombre camina directo hacia la bocina inferior en una dirección perpendicular al poste, como se muestra en la figura P18.72 (a) ¿Cuántas veces escuchará un mínimo en la intensidad del sonido? (b) ¿A qué distancia está del poste en estos momentos? Sea v la rapidez del sonido y suponga que el suelo no refleja sonido. Los oídos del hombre están en el mismo nivel que la bocina inferior.

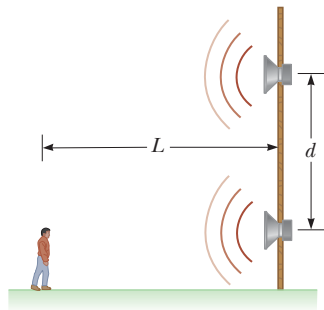


Figura P18.72

73. **Problema de repaso.** Considere el aparato que se muestra en la figura 18.11 y descrito en el ejemplo 18.4. Suponga que el número de antinodos en la figura 18.11b es un valor arbitrario n . (a) Encuentre una expresión para el radio de la esfera en el agua como una función solo de n . (b) ¿Cuál es el mínimo valor permitido de n para una esfera de tamaño distinto de cero? (c) ¿Cuál es el radio de la esfera más grande que se producirá en una onda en la cuerda? (d) ¿Qué pasa si se utiliza una esfera más grande?
74. **Problema de repaso.** El extremo superior de una cuerda de un yo-yo se mantiene en reposo. De hecho, el yo-yo es más pesado que la cuerda. Parte del reposo y se mueve hacia abajo con aceleración constante de 0.800 m/s² mientras se desenrolla de la cuerda. El roce de la cuerda

contra el borde del yo-yo excita vibraciones de onda estacionaria transversales en la cuerda. Ambos extremos de la cuerda son nodos, incluso cuando la longitud de la cuerda aumenta. Considere el instante 1.20 s después que comienza el movimiento a partir del reposo. (a) Demuestre que la razón de cambio con el tiempo de la longitud de onda del modo fundamental de oscilación es 1.92 m/s. (b) ¿Qué pasaría si? ¿La razón de cambio de la longitud de onda del segundo armónico también es 1.92 m/s en este momento? Explique su respuesta. (c) ¿Qué pasaría si? El experimento se repite después de agregar más masa al cuerpo del yo-yo. La distribución de masa se mantiene igual, de modo que el yo-yo todavía se mueve con aceleración hacia abajo de 0.800 m/s². En el punto 1.20 s, ¿la razón de cambio de la longitud de onda fundamental de la cuerda en vibración aún es igual a 1.92 m/s? Explique. (d) ¿La razón de cambio de la longitud de onda del segundo armónico es la misma que en el inciso (b)? Explique.

75. Cuando se golpea la barra de madera que reproduce un tono en una marimba (figura P18.75), vibra en una onda estacionaria transversal que tiene tres antinodos y dos nodos. La nota de frecuencia más baja es 87.0 Hz, producida por la barra de 40.0 cm de largo. (a) Encuentre la rapidez de las ondas transversales sobre la barra. (b) Un tubo resonante suspendido verticalmente bajo el centro de la barra aumenta la sonoridad del sonido emitido. Si el tubo está abierto sólo en el extremo superior, ¿cuál es la longitud del tubo requerida para resonar con la barra en el inciso (a)?



Figura P18.75

76. Una cuerda de nylon tiene 5.50 g de masa y longitud $L = 86.0$ cm. El extremo inferior se amarra al suelo y el extremo superior está unido a un pequeño conjunto de ruedas a través de una ranura en una pista en la cual se mueven las ruedas (figura P18.76). Las ruedas tienen una masa que es despreciable en comparación con la cuerda, y ruedan sin fricción en la pista para que el extremo superior de la cuerda este esencialmente libre. En equilibrio, la cuerda es vertical e inmóvil. Cuando porta una onda de pequeña amplitud, puede suponer que la cuerda está siempre bajo una tensión uniforme de 1.30 N. (a) Encuentre la rapidez de las ondas transversales en la cuerda. (b) Las posibilidades de vibración de la cuerda son un conjunto de

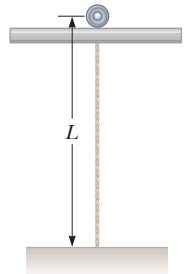


Figura P18.76

estados de onda estacionaria cada uno con un nodo en el extremo inferior fijo y un antinodo en el extremo superior libre. Determine las distancias nodo-antinodo para cada uno de los tres estados más simples. (c) Encuentre la frecuencia de cada uno de estos estados.

77. Dos silbatos de tren tienen frecuencias idénticas de 180 Hz. Cuando un tren está en reposo en la estación y el otro se mueve cerca, un viajero que está de pie en la plataforma de la estación escucha batimientos con una frecuencia de 2.00 batimientos/s, cuando los silbatos funcionan juntos. ¿Cuáles son las dos posibles magnitudes de velocidad y dirección que puede tener el tren en movimiento?

78. **Problema de repaso.** Una bocina enfrente de una habitación y una bocina idéntica en la parte trasera de la habitación se activan mediante el mismo oscilador a 456 Hz. Una estudiante camina con rapidez uniforme de 1.50 m/s a lo largo de la longitud de la habitación. Escucha un solo tono, que alternativamente es más fuerte y más débil. (a) Modele estas variaciones como batimientos entre los sonidos con el corrimiento Doppler que la estudiante recibe. Calcule el número de batimientos que escucha la estudiante cada segundo. (b) Modele las dos bocinas como productoras de una onda estacionaria en la habitación y a la estudiante como si caminara entre antinodos. Calcule el número de máximos de intensidad que la estudiante escucha cada segundo.

79. **Problema de repaso.** Considere el objeto de cobre colgando del alambre de acero en el problema 32. El extremo superior del alambre se fija. Cuando el alambre es golpeado, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Luego se sumerge el objeto de cobre en agua. Si el objeto se puede colocar con cualquier fracción deseada de su volumen sumergido, ¿cuál es la nueva frecuencia fundamental más baja posible?

80. Dos alambres se sueldan juntos por los extremos. Los alambres están hechos del mismo material, pero el diámetro de uno tiene el doble del otro. Ambos están sujetos a una tensión de 4.60 N. El alambre delgado tiene una longitud de 40.0 cm y una densidad de masa lineal de 2.00 g/m. La combinación está fija en ambos extremos y vibra en tal forma que dos antinodos están presentes, con el nodo entre ellos precisamente en la soldadura. (a) ¿Cuál es la frecuencia de vibración? (b) ¿Cuál es la longitud del alambre grueso?

81. Una cuerda con 1.60 g/m de densidad lineal se estira entre dos tornillos de banco separados 48.0 cm. La cuerda no se estira apreciablemente mientras la tensión en él se eleva de manera estable de 15.0 N en $t = 0$ a 25.0 N en $t = 3.50$ s. Por lo tanto, la tensión como función del tiempo está dada por la expresión $T = 15.0 + 10.0t/3.50$. La cuerda vibra en su modo fundamental a lo largo de este proceso. Encuentre el número de oscilaciones que completa durante el intervalo de 3.50 s.

82. Se establece una onda estacionaria en una cuerda de longitud y tensión variables por medio de un vibrador de frecuencia variable. Ambos extremos de la cuerda están fijos. Cuando el vibrador tiene una frecuencia f , en una cuerda de longitud L y bajo tensión T , se establecen n antinodos en la cuerda. (a) Si la longitud de la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambiará la frecuencia de modo que se produzca

el mismo número de antinodos? (b) Si la frecuencia y longitud se mantienen constantes, ¿qué tensión producirá $n + 1$ antinodos? (c) Si la frecuencia se triplica y la longitud de la cuerda se acorta a la mitad, ¿en qué factor cambiará la tensión de modo que se produzca el doble de antinodos?

83. Dos ondas se describen mediante las funciones de onda

$$y_1(x, t) = 5.00 \sin(2.00x - 10.0t)$$

$$y_2(x, t) = 10.0 \cos(2.00x - 10.0t)$$

donde y_1 , y_2 y x están en metro y t en segundos. (a) Demuestre que la onda resultante a partir de su sobreposición se puede expresar como una función sencilla. (b) Determine la amplitud y ángulo de fase de esta onda sinusoidal.

84. Una flauta está diseñada para que produzca una frecuencia de 261.6 Hz, Do medio, cuando están cubiertos todos los agujeros y la temperatura es de 20.0°C. (a) Considere la flauta como un tubo abierto en ambos extremos. Encuentre la longitud de la flauta, suponiendo que el Do medio es el fundamental. (b) Un segundo músico, cerca en un cuarto frío, también intenta tocar Do medio en una flauta idéntica. Una frecuencia de batimiento de 3.00 Hz se escucha cuando se tocan las dos flautas. ¿Cuál es la temperatura del segundo cuarto?

85. **Problema de repaso.** Un objeto de 12.0 kg cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total de $L = 5.00$ m y una densidad de masa lineal $\mu = 0.00100$ kg/m. La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia $d = 2.00$ m (figura P18.85a). (a) Determine la tensión en la cuerda. (b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P18.85b?

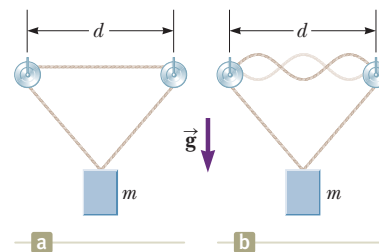


Figura P18.85 Problemas 85 y 86.

86. **Problema de repaso.** Un objeto de masa m cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total L y una densidad de masa lineal μ . La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia d (figura P18.85a). (a) Determine la tensión en la cuerda. (b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P18.85b?

Problemas de desafío

87. **Problema de repaso.** Considere el aparato que se muestra en la figura P18.87a, donde el objeto colgante tiene masa M y la cuerda está vibrando en su segundo armónico. La varilla vibrante de la izquierda mantiene una frecuencia constante. El viento empieza a soplar a la derecha, apli-

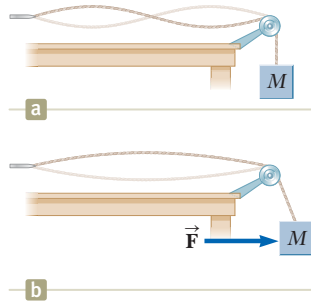


Figura P18.87

cando una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ en el objeto colgante. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que el viento debe aplicar al objeto colgante para que la cuerda vibre en su primer armónico, como se muestra en la figura 18.87b?

88. En las figuras 18.20a y 18.20b, observe que la amplitud de la onda de la componente para la frecuencia f es grande, para que $3f$ sea pequeño, y $5f$ sea más pequeño aún. ¿Cómo sabemos exactamente cuánta amplitud asignar a cada componente de frecuencia para construir una onda cuadrada? Este problema nos ayuda a encontrar la respuesta a esa pregunta. Sea que la onda cuadrada de la figura 18.20c tenga una amplitud A y sea $t = 0$ en el extremo izquierdo

de la figura. Entonces, un periodo T de la onda cuadrada está descrito por

$$y(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Expresé la ecuación 18.13 con frecuencias angulares:

$$y(t) = \sum_n (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t)$$

Ahora procedemos como sigue. (a) Multiplique ambos lados de la ecuación 18.13 por $\sin m\omega t$ e integre ambos lados sobre un periodo T . Demuestre que el lado izquierdo de la ecuación resultante es igual a 0 si m es par y es igual a $4A/m\omega$ si m es impar. (b) Utilizando identidades trigonométricas, demuestre que todos los términos del lado derecho que contienen a B_n son iguales a cero. (c) Usando identidades trigonométricas, demuestre que todos los términos del lado derecho que tienen a A_n son igual a cero, *excepto* en el caso que $m = n$. (d) Demuestre que todo el lado derecho de la ecuación se reduce a $\frac{1}{2}A_m T$. (e) Demuestre que la expansión de la serie de Fourier de una onda cuadrada es

$$y(t) = \sum_n \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega t$$