

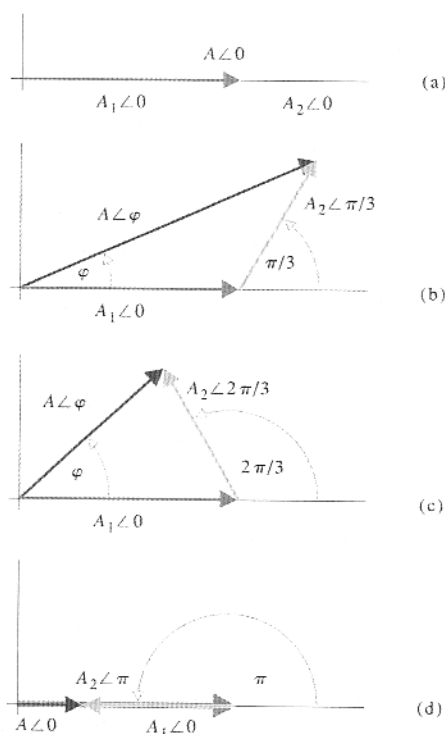


FIGURA 2.18 Suma de fasores.

2.7 ONDAS PLANAS

La onda plana es quizás el ejemplo más simple de onda tridimensional. Existe en un instante dado, cuando todas las superficies sobre las cuales una perturbación tiene fase constante, forman un conjunto de planos, cada uno generalmente perpendicular a la dirección de propagación. Hay razones prácticas para estudiar este tipo de perturbación, una de las cuales es que usando sistemas ópticos podemos producir fácilmente luz semejante a ondas planas.

La expresión matemática para un plano perpendicular a un vector dado $\mathbf{k}$ y que pasa a través de algún punto (x_0, y_0, z_0) es bastante fácil de deducir (figura 2.19). Primero escribimos el vector de posición en coordenadas cartesianas, en términos de los vectores unitarios de la base (figura 2.19a)

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Comienza en algún origen arbitrario O y termina en el punto (x, y, z) que, por el momento, puede ser cualquier lugar en el espacio.

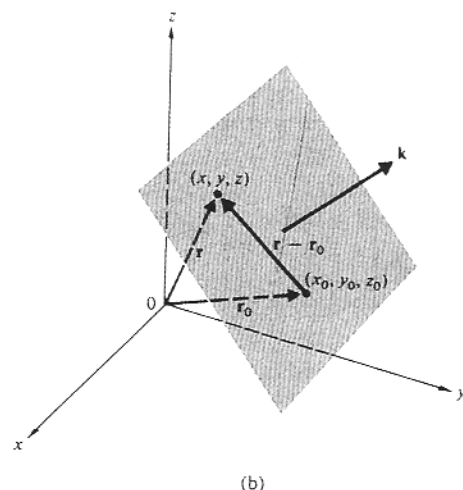
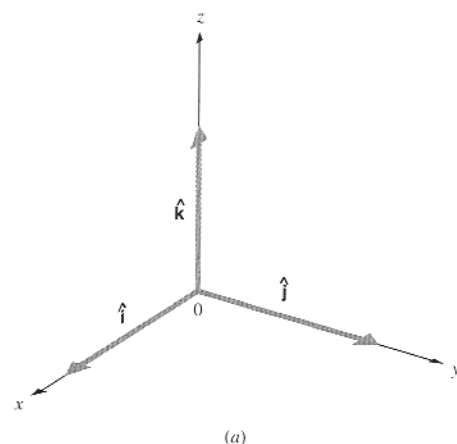


FIGURA 2.19 (a) Los vectores unitarios de la base cartesiana. (b) Una onda plana moviéndose en la dirección de $\mathbf{k}$.

De un modo parecido,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

Estableciendo

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (2.38)$$

obligamos al vector $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ a barrer un plano perpendicular a $\mathbf{k}$, al ir adquiriendo su punto extremo (x, y, z) todos los valores permitidos.

Con

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}} \quad (2.39)$$

la ecuación (2.38) puede expresarse de la siguiente forma

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0 \quad (2.40)$$

o como $k_x x + k_y y + k_z z = a \quad (2.41)$

donde

$$a = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = \text{constante} \quad (2.42)$$

La forma más concisa de la ecuación de un plano perpendicular a $\mathbf{k}$ es entonces

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante} = a \quad (2.43)$$

El plano es el lugar de todos los puntos cuyos vectores de posición tienen cada uno la misma proyección en la dirección de $\mathbf{k}$.

Ahora podemos construir un conjunto de planos sobre los cuales $\psi(\mathbf{r})$ varía de manera sinusoidal en el espacio, es decir

$$\psi(\mathbf{r}) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.44)$$

$$\psi(\mathbf{r}) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.45)$$

o $\psi(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.46)$

Para todas estas expresiones $\psi(\mathbf{r})$ se mantiene constante sobre cada plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$. Como estamos analizando las funciones armónicas, deberían repetirse en el espacio después de un desplazamiento de λ en la dirección de $\mathbf{k}$. En la figura 2.20 se representa de manera muy sencilla esta clase de expresión. Del infinito número de planos, hemos dibujado tan sólo unos pocos, cada uno con una $\psi(\mathbf{r})$ diferente. Los planos deberían también haberse dibujado con una extensión espacial infinita, ya que no se han puesto límites a $\mathbf{r}$. La perturbación ocupa claramente todo el espacio.

La naturaleza repetitiva espacial de estas funciones armónicas se puede expresar por

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi\left(\mathbf{r} + \frac{\lambda \mathbf{k}}{k}\right) \quad (2.47)$$

donde k es la magnitud de $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}/k$ es un vector unitario paralelo a él (figura 2.21). En la forma exponencial, esto equivale a

$$A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = A e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \lambda \mathbf{k}/k)} = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\lambda k}$$

Para que sea cierto, debemos tener

$$e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$$

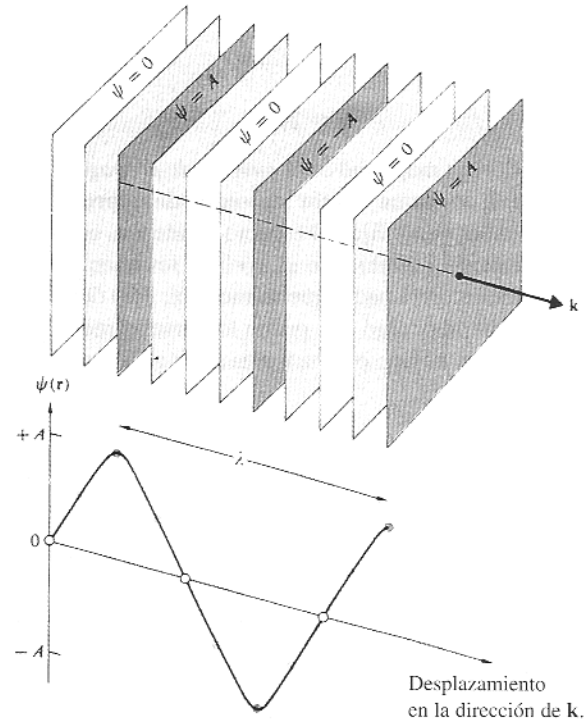


FIGURA 2.20 Frentes de onda para una onda plana armónica.

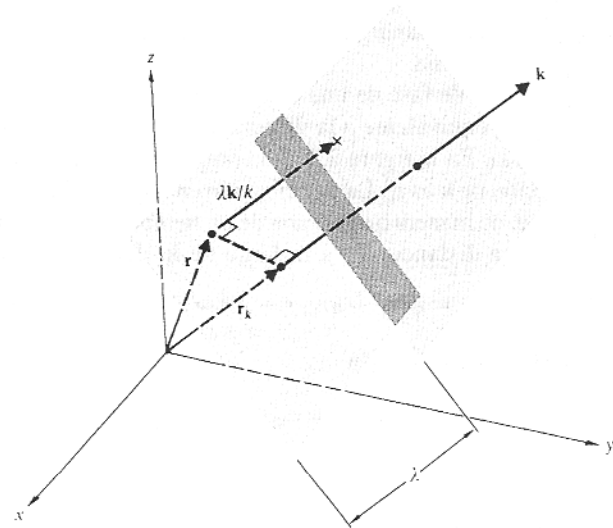


FIGURA 2.21 Ondas planas.

Por consiguiente

$$\lambda k = 2\pi$$

y

$$k = 2\pi/\lambda$$

El vector $\mathbf{k}$, cuya magnitud es el *número de propagación* k (ya introducido), se llama **vector de onda de o propagación**.

En cualquier punto fijo del espacio donde $\mathbf{r}$ es constante, la fase es constante y también lo es $\psi(\mathbf{r})$; en resumen, los planos están inmóviles. Para hacer que se muevan, $\psi(\mathbf{r})$ debe hacerse variar en el tiempo, algo que puede lograrse introduciendo la dependencia del tiempo en una forma análoga a la de una onda unidimensional.

Aquí entonces

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.48)$$

donde A , ω y k son constantes. Mientras que esta perturbación viaja a lo largo de la dirección $\mathbf{k}$, podemos asignarle una fase correspondiente en cada punto en el espacio y en el tiempo. En cualquier instante, *las superficies que unen todos los puntos de igual fase se conocen como frentes de onda*. Obsérvese que la función de onda tendrá un valor constante sobre el frente de onda solamente si la amplitud A tiene un valor fijo en todos los puntos del frente de onda. Por lo general, A es una función de $\mathbf{r}$ y puede que no sea constante en todo el espacio o en todo un frente de onda. En este último caso, la onda se dice *inhomogénea*. Nos ocuparemos de esta clase de perturbación solo más adelante cuando analicemos los haces de láser y la reflexión total interna.

La velocidad de fase de una onda plana dada por la ecuación (2.48) es equivalente a la velocidad de propagación del frente de onda. En la figura 2.21, la componente escalar de $\mathbf{r}$ en la dirección de $\mathbf{k}$ es r_k . La perturbación en un frente de onda es constante, de manera que al cabo de un tiempo dt , si el frente recorre una distancia dr_k a lo largo de $\mathbf{k}$, debemos tener

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r_k + dr_k, t + dt) = \psi(r_k, t) \quad (2.49)$$

En forma exponencial, sería

$$Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = Ae^{i(kr_k + kdr_k - \omega t - \omega dt)} = Ae^{i(kr_k - \omega t)}$$

por consiguiente $k dr_k = \pm \omega dt$.

La magnitud de la velocidad de la onda, dr_k/dt es

$$\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (2.50)$$

Podríamos haber anticipado este resultado girando el sistema coordenado de la figura 2.21 de tal forma que $\mathbf{k}$ fuera paralelo al eje x . Para esa orientación

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

ya que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr_k = kx$. La onda ha sido reducida efectivamente de esa manera a la perturbación unidimensional de la que ya se habló.

Ahora, considérense las dos ondas de la figura 2.22; ambas tienen la misma longitud de onda λ de tal manera que $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$. La onda 1 que se propaga a lo largo del eje z puede escribirse así

$$\psi_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t\right)$$

donde, puesto que $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{r}$ son paralelos, $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = kz = (2\pi/\lambda)z$. De forma análoga, para la onda 2, $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} = k_z z + k_y y = (k \cos \theta)z + (k \sin \theta)y$,

$$\psi_2 = A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} (z \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t\right]$$

Volveremos a estas expresiones y a lo que ocurre en la zona de superposición cuando analicemos la interferencia con más detalle.

La onda armónica plana a menudo se escribe en coordenadas cartesianas como

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (2.51)$$

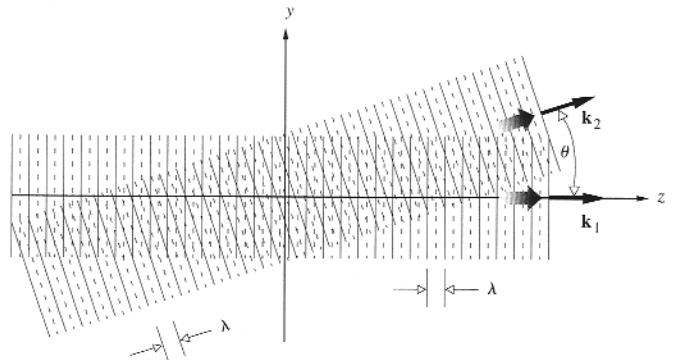


FIGURA 2.22 Dos ondas superpuestas de la misma longitud de onda moviéndose en direcciones diferentes.

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \omega t]} \quad (2.52)$$

donde α , β , y γ son los cosenos directores de $\mathbf{k}$ (véase problema 2.33). En términos de sus componentes, la magnitud del vector de propagación está dado por

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (2.53)$$

y por supuesto

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (2.54)$$

Hemos examinado ondas planas poniendo de relieve particularmente las funciones armónicas. El significado especial de estas ondas es doble: en primer lugar, físicamente, las ondas sinusoidales pueden generarse de manera relativamente simple, usando alguna forma de oscilador armónico; en segundo lugar, **cualquier onda tridimensional puede expresarse como una combinación de ondas planas**, cada una con amplitud y dirección de propagación distintas.

Podemos ciertamente imaginar una serie de ondas planas como las de la figura 2.20, donde la perturbación varía de alguna forma que no es armónica (figura 2.23). En la siguiente sección se verá que las ondas planas armónicas son, efectivamente, un caso especial de una solución más general de ondas planas.

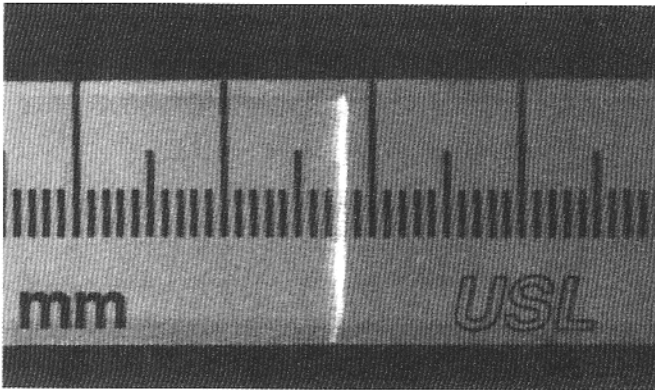


FIGURA 2.23 Imagen de un único pulso láser colimado captado mientras se desplazaba a lo largo de la superficie de una regla. Este impulso ultracorto de luz equivaldría a una parte de una onda plana. Se extendía en el tiempo durante 300×10^{-15} s y medía tan sólo una fracción de milímetro de largo. (Foto cedida por J. Valdamanis y N.H. Abramson).

2.8 LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ONDA TRIDIMENSIONAL

De todas las ondas tridimensionales, solamente la onda plana (armónica o no) puede moverse en el espacio sin cambiar su perfil. Está claro que la idea de una onda como una perturbación cuyo perfil *no se altera* es algo incompleta. De la misma manera, podemos definir una onda como una solución cualquiera de la ecuación diferencial de onda. Lo que necesitamos ahora es una ecuación de onda tridimensional, lo cual debería ser bastante sencillo de conseguir ya que podemos adivinar su forma generalizando la expresión unidimensional, ecuación (2.11). No hay que olvidar que en coordenadas cartesianas, las variables de posición x , y , y z tienen que aparecer simétricamente² en la ecuación tridimensional. La función de onda $\psi(x, y, z, t)$ dada por la ecuación (2.52) es una solución particular de la ecuación diferencial que estamos buscando. En analogía con la deducción de la ecuación (2.11), calculamos las siguientes derivadas parciales de la ecuación (2.52):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\alpha^2 k^2 \psi \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\beta^2 k^2 \psi \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\gamma^2 k^2 \psi \quad (2.57)$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad (2.58)$$

Sumando las tres derivadas espaciales y utilizando el hecho de que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi \quad (2.59)$$

Combinando esto con la derivada del tiempo, ecuación (2.58) y recordando que $v = \omega/k$, llegamos a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

² No hay distinción característica para ninguno de los ejes en coordenadas cartesianas. Debemos por lo tanto ser capaces de cambiar los nombres de, digamos, x a z , de y a x y de z a y (manteniendo el sistema derecho) sin alterar la ecuación diferencial de onda.

la ecuación diferencial de onda tridimensional. Obsérvese que x , y , y z aparecen simétricamente y que la forma es precisamente la que uno esperaría de la generalización de la ecuación (2.11).

La ecuación (2.60) se escribe, por lo general, de una forma más concisa introduciendo el operador *Laplaciano*

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.61)$$

que pasa a ser simplemente

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.62)$$

Ahora que disponemos de esta ecuación muy importante, volvamos brevemente a la onda plana y veamos cómo se adecua al esquema de cosas. Una función de la forma

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)} \quad (2.63)$$

es equivalente a la ecuación (2.52) y como tal, es una solución de la ecuación (2.62). Se puede también demostrar (problema 2.34) que

$$\psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt) \quad (2.64)$$

$$\text{y} \quad \psi(x, y, z, t) = g(\alpha x + \beta y + \gamma z + vt) \quad (2.65)$$

son ambas soluciones de onda plana de la ecuación diferencial de onda. Las funciones f y g , que son diferenciables dos veces, son arbitrarias y no necesitan ciertamente ser armónicas. Una combinación lineal de estas soluciones es también una solución, pudiendo escribir esto de una forma ligeramente diferente como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C_1 f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}/k - vt) + C_2 g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}/k + vt) \quad (2.66)$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Las coordenadas cartesianas son particularmente adecuadas para describir ondas planas. Sin embargo, cuando aparecen varias situaciones físicas, podemos frecuentemente sacar más provecho de las simetrías existentes utilizando otras representaciones coordenadas.

2.9 ONDAS ESFÉRICAS

Arrojemos una piedra a un depósito de agua. Las ondas superficiales que proceden del punto de impacto, se esparcen hacia afuera en ondas circulares bidimensionales. Extendiendo esta

imagen a tres dimensiones, imagínese una pequeña esfera que late, rodeada de un fluido. La contracción y expansión de la fuente generan variaciones de presión que se propagan hacia afuera como ondas esféricas.

Considérese ahora una fuente puntual ideal de luz. La radiación que procede de ella fluye radialmente hacia afuera, uniformemente en todas las direcciones. Se dice que la fuente es *isótropa* y los frentes de onda resultantes son de nuevo esferas concéntricas con diámetro creciente cuando se expanden en el espacio que los rodea. La simetría obvia de los frentes de onda sugiere que podría ser más conveniente describirlos matemáticamente en términos de coordenadas esféricas polares (figura 2.24). En esta representación, el operador Laplaciano es

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.67)$$

donde r , θ , ϕ se definen por

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

Recuérdese que estamos buscando una descripción de ondas esféricas, ondas que son simétricas esféricamente (es decir, que no dependen de θ ni de ϕ); por lo tanto

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)$$

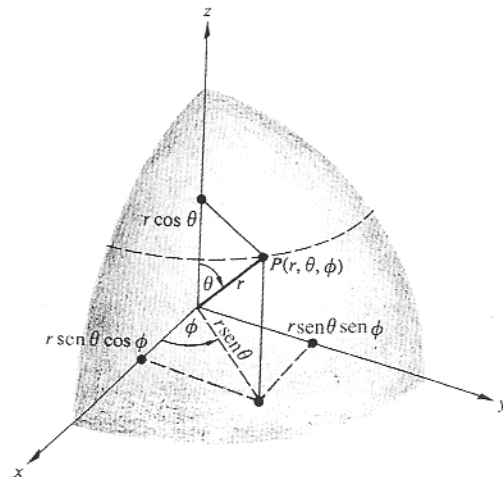


FIGURA 2.24 Geometría de coordenadas esféricas.

Entonces, el Laplaciano de $\psi(r)$ es simplemente

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.68)$$

Este resultado se puede obtener sin conocer la ecuación (2.67). Comiencese con la forma cartesiana del Laplaciano, ecuación (2.61), opérese sobre la función de onda $\psi(r)$ simétricamente esférica y conviértase cada término en coordenadas polares. Examinando solamente la dependencia de x , tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$y \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\text{ya que} \quad \psi(r) = \psi(r)$$

$$\text{Utilizando} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

tenemos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (x) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

$$y \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Ahora teniendo $\partial^2 \psi / \partial x^2$, formamos $\partial^2 \psi / \partial y^2$ y $\partial^2 \psi / \partial z^2$ y sumando obtenemos

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

la cual es equivalente a la ecuación (2.68). Este resultado puede expresarse de forma ligeramente diferente:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \quad (2.69)$$

La ecuación diferencial de onda puede escribirse como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.70)$$

Multiplicando ambos lados por r , obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) \quad (2.71)$$

Obsérvese que esta expresión es ahora precisamente la ecuación diferencial de onda unidimensional, ecuación (2.11), donde la variable espacial es r y la función de onda es el producto $(r\psi)$. La solución de la ecuación (2.71) es entonces simplemente

$$r\psi(r, t) = f(r - vt)$$

$$\text{o} \quad \psi(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r} \quad (2.72)$$

Esto representa una onda esférica que progresa radialmente hacia afuera desde su origen, con una velocidad constante v , y que tiene una forma funcional arbitraria f . Otra solución está dada por

$$\psi(r, t) = \frac{g(r + vt)}{r}$$

y en este caso la onda está convergiendo hacia el origen³. El hecho de que esta expresión falla en $r = 0$ es de poca importancia práctica.

Un caso espacial de la solución general

$$\psi(r, t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + C_2 \frac{g(r + vt)}{r} \quad (2.73)$$

es la *onda esférica armónica*

$$\psi(r, t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{r} \right) \cos k(r \mp vt) \quad (2.74)$$

$$\text{o} \quad \psi(r, t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{r} \right) e^{ik(r \mp vt)} \quad (2.75)$$

donde la constante $\mathcal{A}$ se denomina *intensidad de la fuente*. Para cualquier valor fijo del tiempo, esto representa una agrupación de esferas concéntricas que llenan todo el espacio. Cada frente de onda, o superficie de fase constante, está dado por

$$kr = \text{constante}$$

Obsérvese que la amplitud de cualquier onda esférica es una función de r , donde el término r^{-1} sirve como factor de atenuación. Contrariamente a la onda plana, una onda esférica disminuye en amplitud, cambiando por lo tanto su perfil, al

³ Existen otras soluciones más complicadas cuando la onda no es esféricamente simétrica. Véase C. A. Coulson, *Waves*, capítulo 1.

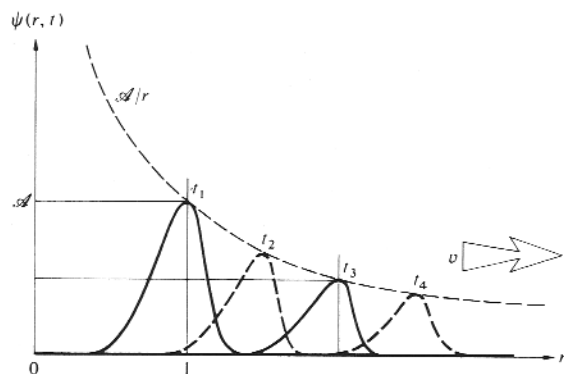


FIGURA 2.25 «Exposición cuádruple» de un pulso esférico.

expandirse y alejarse del origen⁴. La figura 2.25 ilustra este hecho gráficamente, mostrando una «exposición múltiple» de un pulso esférico en cuatro tiempos diferentes. El pulso tiene la misma extensión en el espacio en cualquier punto a lo largo de cualquier radio r , es decir, el ancho del pulso a lo largo del eje r es una constante. La figura 2.26 es un intento de relacionar la representación de $\psi(r, t)$, de la figura anterior con su forma real de onda esférica. Representa la mitad de un pulso esférico en dos tiempos diferentes, cuando la onda se expande hacia afuera. Recuérdese que estos resultados se obtienen independientemente de la dirección de r , debido a la simetría esférica. Podríamos también haber dibujado una onda simétrica, en lugar de un pulso, en las figuras 2.25 y 2.26. En este caso, la perturbación sinusoidal habría estado limitada por las curvas

$$\psi = A/r \quad \text{y} \quad \psi = -A/r$$

⁴ El factor de atenuación es consecuencia directa de la conservación de energía. El capítulo 3 contiene una discusión de cómo se aplican estas ideas concretamente a la radiación electromagnética.

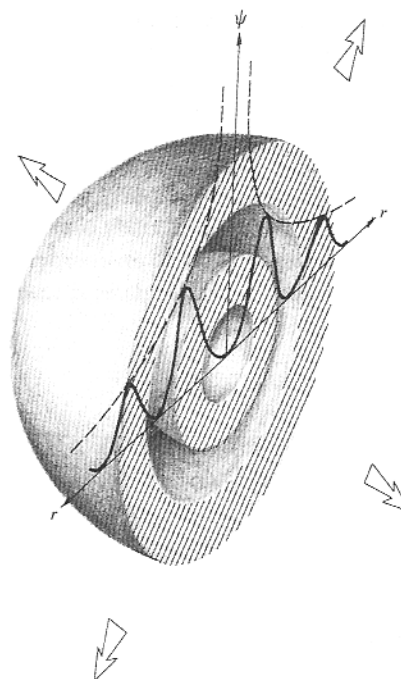


FIGURA 2.26 Frentes de onda esféricas.

La onda esférica saliente que procede de una fuente puntual y la entrante que converge hacia un punto, son idealizaciones. En realidad, la luz sólo se aproxima a ondas esféricas como también sólo se aproxima a ondas planas.

Cuando un frente de onda esférico se propaga hacia afuera, su radio aumenta. A una distancia suficiente de la fuente, una pequeña área del frente de onda se parecerá mucho a una porción de una onda plana (figura 2.27).

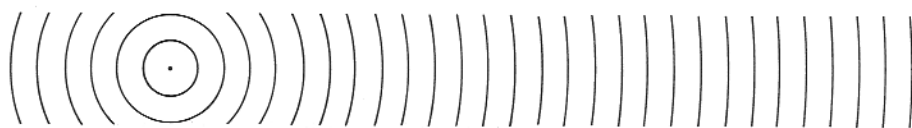


FIGURA 2.27 Aplanamiento de ondas esféricas con la distancia.

2.10 ONDAS CILÍNDRICAS

Ahora examinaremos brevemente otro frente de onda idealizado, el cilindro circular infinito. Desafortunadamente, dada la complejidad del tratamiento matemático preciso, aquí nos limitaremos a trazar el procedimiento. El Laplaciano de ψ en coordenadas cilíndricas (figura 2.28) es

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.76)$$

donde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \text{and} \quad z = z$$

El caso sencillo de simetría cilíndrica requiere que

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, z) = \psi(r)$$

La independencia en θ significa que un plano perpendicular al eje z intersecará el frente de onda en un círculo, el cual puede variar en r , para diferentes valores de z . Aparte, la independencia en z restringe además el frente de onda a un cilindro circular recto centrado en el eje z y que tiene una longitud infinita. La ecuación diferencial de onda es entonces

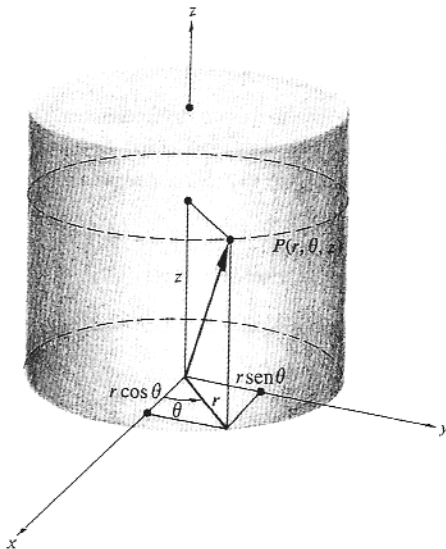


FIGURA 2.28 Geometría de coordenadas cilíndricas.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.77)$$

Después de alguna operación en la cual la dependencia del tiempo se separa, la ecuación (2.77) se convierte en algo que se llama la ecuación de Bessel. Las soluciones de la ecuación de Bessel para grandes valores de r se aproximan gradualmente a formas trigonométricas simples. Cuando r es suficientemente grande, podemos escribir

$$\psi(r, t) \approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} e^{ik(r \mp vt)}$$

$$\psi(r, t) \approx \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{r}} \cos k(r \mp vt) \quad (2.78)$$

Esto representa un conjunto de cilindros circulares coaxiales que llenan todo el espacio y que viajan hacia una fuente lineal infinita o se alejan de ella. Ahora, no se puede encontrar ninguna solución en términos de funciones arbitrarias como las había tanto para las ondas esféricas [ecuación (2.73)] como para las ondas planas [ecuación (2.66)].

Una onda plana que choca en la parte posterior de una pantalla opaca plana y que contiene una rendija delgada y larga, producirá una emisión, por esa rendija, de una perturbación parecida a una onda cilíndrica (véase figura 2.29). Esta técnica se ha utilizado ampliamente para generar ondas luminosas cilíndricas (pág. 386).

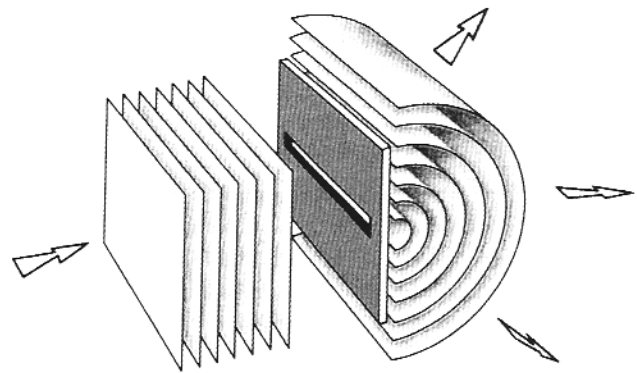


FIGURA 2.29 Ondas cilíndricas saliendo de una rendija estrecha y larga.