Primer Examen Parcial
Cálculo IV

Enero 2022

1. **Resuelva la siguiente integral múltiple sobre la región indicada:**

$$f(x,y) = x^m y^n, \;\; n, m > 0$$

$$[0,1] \times [0,1]$$

Este problema se resuelve aplicando doble integración directa:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n dxdy = \int_0^1 x^m dx \int_0^1 y^n dy$$

Como n *y* m *son números positivos:*

$$I = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[\frac{1^{m+1} - 0^{m+1}}{m+1}\right] \left[\frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1}\right] = \left[\frac{1}{m+1}\right] \left[\frac{1}{n+1}\right]$$

Por ende, el resultado es

$$I = \frac{1}{(m+1)(n+1)}$$

2. **Calcule la siguiente integral como región de tipo I y II:**

$$f(x,y) = xy$$

$$[0,1] \times [x,1]$$

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 1.):

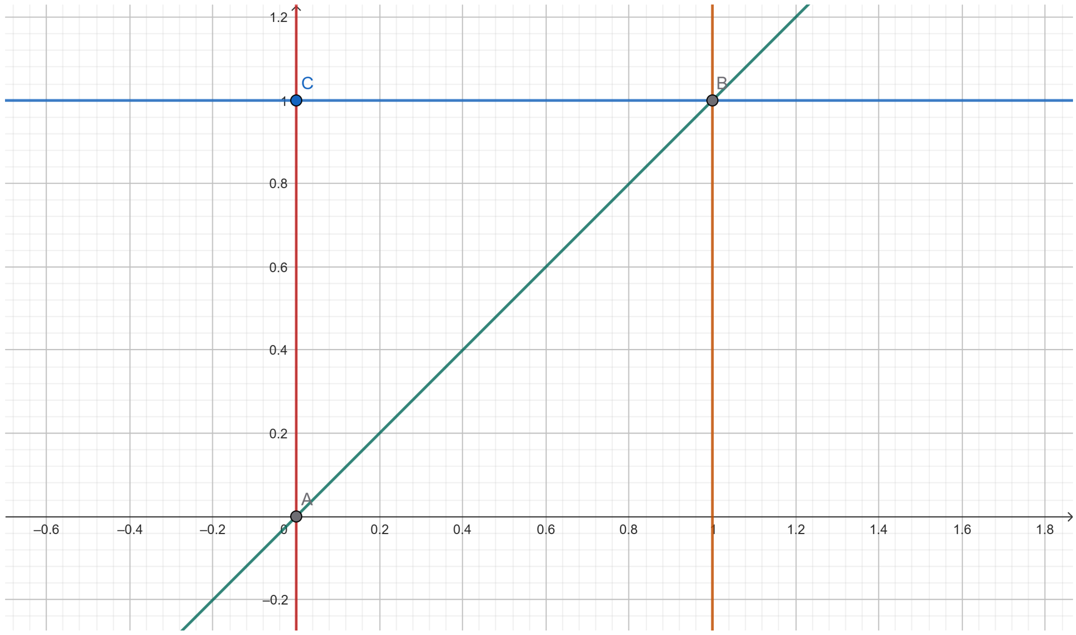

Figura 1. *Región del problema 2.*

La región que nos interesa es la comprendida entre los vértices A, B y C. Para una región de tipo I la región es la dada inicialmente en el problema. Por ende:

$$I = \int_0^1 \int_x^1 xydydx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx = \int_0^1 x\left[\frac{1^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right]dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\right]dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{4} - \frac{1^4}{8}\right] - \left[\frac{0^2}{4} - \frac{0^4}{8}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Para la región de tipo II:

$$[0, y] \times [0, 1]$$

Realizando la integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^y xydxdy = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y dy = \int_0^1 y\left[\frac{y^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]dy = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{2}\right]dy$$

$$I = \left[\frac{y^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1^4}{8} - \frac{0^4}{8} = \frac{1}{8}$$

3. **Calcule el volumen de un cono de radio R y altura H.**

   La ecuación de un cono circular cuyo eje coincide con el eje z es:

$$x^2 + y^2 = a^2z^2$$

Donde a es una constante. Pero también se puede representar como:

$$r^2 = a^2 z^2$$

Dividiendo la expresión anterior entre z^2:

$$\frac{r^2}{z^2} = a^2$$

$$\left(\frac{r}{z}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{r}{z} = a$$

Es necesario mencionar que z representa la variación en la altura del cono, mientras que r representa la variación del radio del mismo. Por lo que, esta relación es válida cuando $z = H$ y $r = R$. Es decir:

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H} = a$$

De esta manera, la ecuación del cono es:

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$$

Despejando z:

$$z^2 = \frac{H^2}{R^2}(x^2 + y^2)$$

$$z = \pm \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ahora debemos tener cuidado con el signo, dado que la solución positiva representa un cono que abre hacia el eje positivo de z, y la solución negativa representa un cono que abre hacia el eje negativo de z. Podemos usar cualquier caso, pero en particular usaremos la solución positiva:

$$z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dado que buscamos el volumen encerrado en el cono de altura H, cuya punta se encuentra en el origen:

$$\frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$$

De este modo, el volumen estará dado por siguiente la integral triple:

$$V = \int_V dV$$

Para facilitar la integración, podemos usar coordenadas cilíndricas (debido a la geometría del problema), donde:

$$dV = rdzdrd\theta$$

Cuya región ahora es:

$$\frac{H}{R}r \leq z \leq H$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Por ende:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{H}{R}r}^H rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \int_{\frac{H}{R}r}^H rdzdr = [\theta]_0^{2\pi} \int_0^R r\,[z]_{\frac{H}{R}r}^H\, dr$$

$$V = (2\pi - 0) \int_0^R r \left(H - \frac{H}{R}r\right) dr = 2\pi H \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) dr = 2\pi H \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right]_0^R$$

$$V = 2\pi H \left[\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3R}\right)\right] = 2\pi H \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right) = 2\pi H \left(\frac{R^2}{6}\right)$$

$$V = \pi H \left(\frac{R^2}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Lo cual concuerda con la fórmula para determinar el volumen de un cono circular.

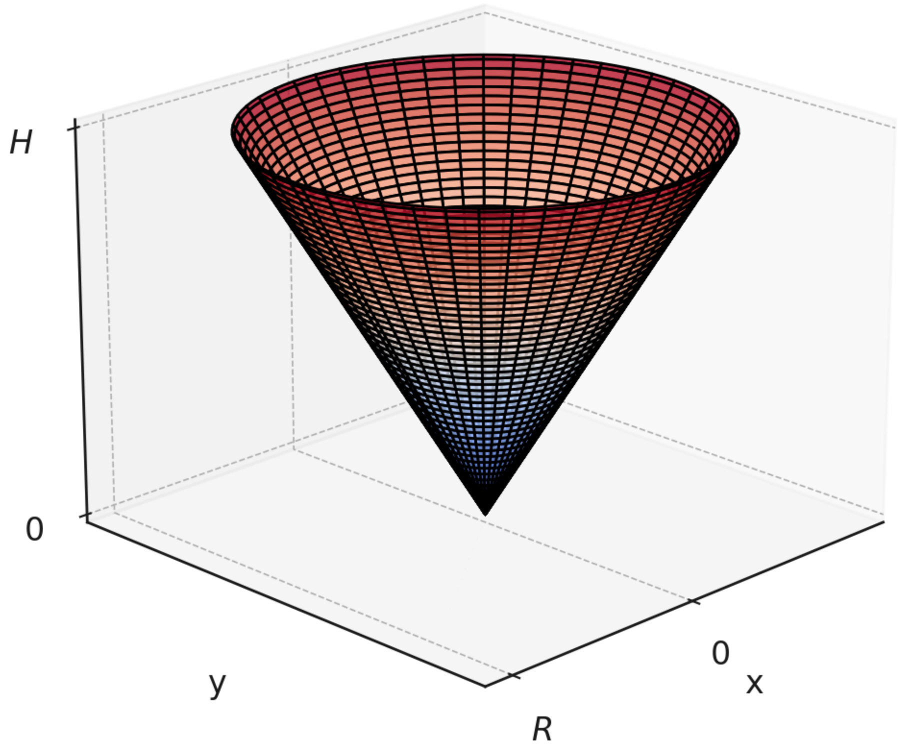

Figura 2. *Cono de altura H y radio R.*

4. **Sea D^* el paralelogramo limitado por la rectas $y = 3x + 4$, $y = 3x$, $y = x/2$, $y = (x+4)/2$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Encuentre una aplicación T tal que $T(D^*) = D$.**

   Primero, tracemos el dibujo del paralelogramo D^* (Figura 3.) para localizar los puntos de intersección en las rectas dadas. Para hallar la intersección entre las rectas $y = 3x$, $y = x/2$:

$$3x = \frac{x}{2}$$

   Por ende, $x = 0$, lo que a su vez, implica que $y = 0$. A este punto lo denominaremos $A^*(0, 0)$. Para hallar la intersección entre las rectas $y = 3x$, $y = (x + 4)/2$:

$$3x = \frac{x + 4}{2}$$

$$6x = x + 4$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Por ende:

$$y = 3x = 3\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{5}$$

A este punto lo denominaremos $B^*\left(4/5, 12/5\right)$*. Para hallar la intersección entre las rectas* $y = 3x + 4$*,* $y = (x+4)/2$*:*

$$3x + 4 = \frac{x+4}{2}$$

$$6x + 8 = x + 4$$

$$5x = -4$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

Por ende:

$$y = 3x + 4 = 3\left(-\frac{4}{5}\right) + 4 = \frac{8}{5}$$

A este punto lo denominaremos $C^*\left(-4/5, 8/5\right)$*. Para hallar la intersección entre las rectas* $y = 3x + 4$*,* $y = x/2$*:*

$$3x + 4 = \frac{x}{2}$$

$$6x + 8 = x$$

$$5x = -8$$

$$x = -\frac{8}{5}$$

Por ende:

$$y = 3x + 4 = 3\left(-\frac{8}{5}\right) + 4 = -\frac{4}{5}$$

A este punto lo denominaremos $D^*(-8/5, -4/5)$. *Ahora, propondremos una transformación lineal de la forma:*

$$T(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$$

Ahora, podemos establecer los puntos del paralelogramo D*:* $A(0,0)$*,* $B(1,0)$*,* $C(1,1)$ *y* $D(0,1)$*. Usando el punto* A^**:*

$$T(0,0) = [a(0) + b(0) + c, d(0) + e(0) + f] = (c, f) = (0,0)$$

Por ende, $c = 0$ *y* $f = 0$*:*

$$T(x, y) = (ax + by, dx + ey)$$

Usando el punto B^**:*

$$T\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right) = \left[a\left(\frac{4}{5}\right) + b\left(\frac{12}{5}\right), d\left(\frac{4}{5}\right) + e\left(\frac{12}{5}\right)\right] = (1,0)$$

$$\frac{4}{5}a + \frac{12}{5}b = 1$$

$$\frac{4}{5}d + \frac{12}{5}e = 0$$

Usando el punto C^**:*

$$T\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \left[a\left(-\frac{4}{5}\right) + b\left(\frac{8}{5}\right), d\left(-\frac{4}{5}\right) + e\left(\frac{8}{5}\right)\right] = (1,1)$$

$$-\frac{4}{5}a + \frac{8}{5}b = 1$$

$$-\frac{4}{5}d + \frac{8}{5}e = 1$$

Para encontrar a *y* b *debemos resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:*

$$\frac{4}{5}a + \frac{12}{5}b = 1$$

$$-\frac{4}{5}a + \frac{8}{5}b = 1$$

Para encontrar e *y* f *debemos resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:*

$$\frac{4}{5}d + \frac{12}{5}e = 0$$

$$-\frac{4}{5}d + \frac{8}{5}e = 1$$

Al resolver ambos sistemas:

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$d = -\frac{3}{4}$$

$$e = \frac{1}{4}$$

Por ende, la transformación lineal es:

$$T\left(x, y\right) = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y, -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right)$$

Si queremos asegurarnos de la respuesta, podemos probar la transformación del punto $D^*\left(-8/5, -4/5\right)$*:*

$$T\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left[-\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right), -\frac{3}{4}\left(-\frac{8}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{5}\right)\right] = (0, 1)$$

Lo cual es correcto.

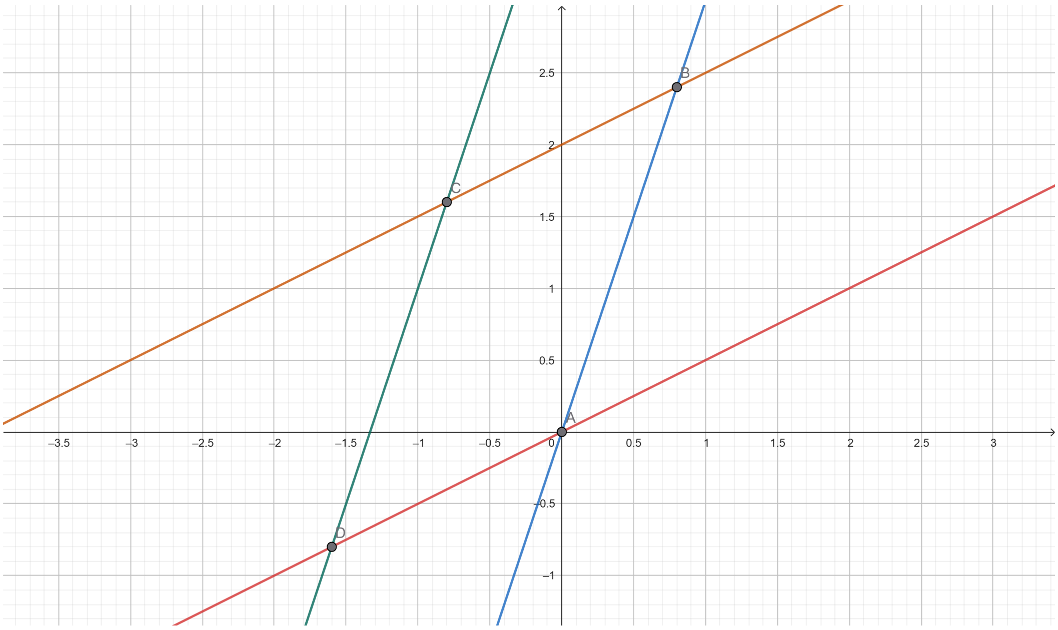

Figura 3. *Gráfica del paralelogramo D^*.*

5. **Integrar la función $\ln(x^2+y^2)$ sobre la sección del anillo en el primer cuadrante, con radio interior a y radio exterior b.**

   Primero, debemos visualizar la región de integración (Figura 4.):

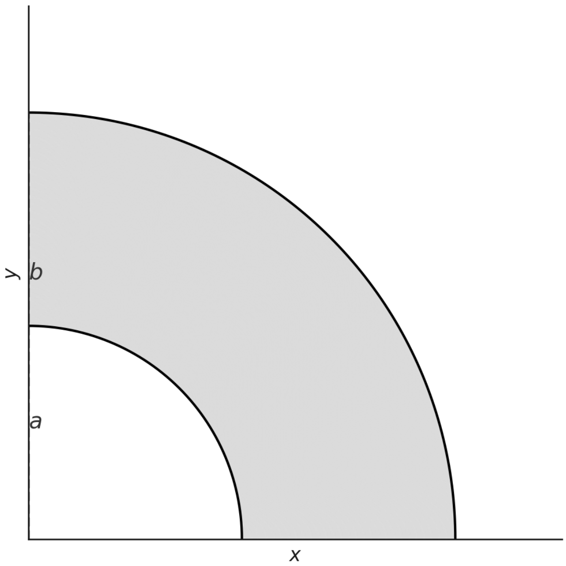

Figura 4. *Sección del anillo en el primer cuadrante.*

Dado que la región de integración tiene simetría circular, será apropiado el uso de coordenadas polares. En la cual:

$$dA = r dr d\theta$$

La región de integración debe ser:

$$a \leq r \leq b$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Esto es debido a que la región de integración se encuentra en el primer cuadrante. Integrando:

$$I = \int_A \ln\left(x^2 + y^2\right) dA = \int_0^{\pi/2} \int_a^b \ln\left(r^2\right) r dr d\theta$$

Usando el siguiente cambio de variable:

$$u = r^2$$

$$du = 2rdr$$

Podemos resolver la integral respecto de r:

$$\int_a^b \ln\left(r^2\right) r dr = \int_{u_1}^{u_2} \ln(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \ln(u)\, du = \frac{1}{2} u \left[\ln(u) - 1\right]_{u_1}^{u_2}$$

Deshaciendo la sustitución:

$$\int_a^b \ln\left(r^2\right) r dr = \frac{1}{2} r^2 \left[\ln\left(r^2\right) - 1\right]_a^b = \frac{1}{2} \left\{b^2 \left[\ln\left(b^2\right) - 1\right] - a^2 \left[\ln\left(a^2\right) - 1\right]\right\}$$

Reemplazando:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \left\{b^2 \left[\ln\left(b^2\right) - 1\right] - a^2 \left[\ln\left(a^2\right) - 1\right]\right\} d\theta$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{b^2 \left[\ln\left(b^2\right) - 1\right] - a^2 \left[\ln\left(a^2\right) - 1\right]\right\} \left[\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \frac{1}{2} \left\{b^2 \left[\ln\left(b^2\right) - 1\right] - a^2 \left[\ln\left(a^2\right) - 1\right]\right\} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

Simplificando y reorganizando:

$$I = \frac{\pi}{4} \left\{b^2 \left[\ln\left(b^2\right) - 1\right] - a^2 \left[\ln\left(a^2\right) - 1\right]\right\}$$