Segundo Examen Parcial
Cálculo IV

Enero 2022

1. **Integre a lo largo de las trayectorias e intervalos descritos:**

$$f_1(x,y,z) = x + y + z, \;\; \vec{\sigma}_1(t) = (\sin t, \cos t, t)\,, \;\; t : [0, 2\pi]$$

$$f_2(x,y,z) = xyz, \;\; \vec{\sigma}_2(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t, 3\right)\,, \;\; t : [0, \pi]$$

En el caso de la primera función:

$$f_1(t) = \sin t + \cos t + t$$

$$\vec{\sigma}_1'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$$

$$\|\vec{\sigma}_1'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Entonces:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f_1(t)\,\|\vec{\sigma}_1'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sin t + \cos t + t)dt$$

$$I_1 = \sqrt{2}\left[-\cos t + \sin t + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$I_1 = \sqrt{2}\left\{\left[-\cos(2\pi) + \sin(2\pi) + \frac{(2\pi)^2}{2}\right] - \left[-\cos(0) + \sin(0) + \frac{(0)^2}{2}\right]\right\}$$

$$I_1 = \sqrt{2}\left[\left(-1 + 2\pi^2\right) - (-1)\right] = \sqrt{2}(2\pi^2) = 2\pi^2\sqrt{2}$$

En el caso de la segunda función:

$$f_2(t) = (e^t \cos t)(e^t \sin t)(3) = 3e^{2t} \sin t \cos t$$

$$\vec{\sigma}_2'(t) = \big(-e^t \sin t + e^t \cos t, e^t \cos t + e^t \sin t, 0\big)$$

$$\|\vec{\sigma}_2'(t)\| = \sqrt{\left(-e^t \sin t + e^t \cos t\right)^2 + \left(e^t \cos t + e^t \sin t\right)^2}$$

Simplificando la norma de $\vec{\sigma}_2'(t)$*:*

$$\|\vec{\sigma}_2'(t)\| = \sqrt{e^{2t}\left(\cos t - \sin t\right)^2 + e^{2t}\left(\cos t + \sin t\right)^2}$$

$$\|\vec{\sigma}_2'(t)\| = \sqrt{e^{2t}\left[\left(\cos t - \sin t\right)^2 + \left(\cos t + \sin t\right)^2\right]}$$

$$\|\vec{\sigma}_2'(t)\| = e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t}$$

$$\|\vec{\sigma}_2'(t)\| = e^t \sqrt{2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = e^t \sqrt{2\,(1)} = e^t \sqrt{2}$$

Entonces:

$$I_2 = \int_0^\pi f_2(t)\,\|\vec{\sigma}_2'(t)\|\,dt = \int_0^\pi (3e^{2t} \sin t \cos t)\left(e^t \sqrt{2}\right) dt = 3\sqrt{2} \int_0^\pi (e^{3t} \sin t \cos t) dt$$

Además, $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$*:*

$$I_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2} \int_0^\pi \left[e^{3t} \sin(2t)\right] dt$$

Para integrar por partes usemos lo siguiente:

$$u = \sin(2t)$$

$$du = 2\cos(2t)dt$$

$$dv = e^{3t}dt$$

$$v = \frac{1}{3}e^{3t}$$

De este modo:

$$\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\sin(2t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{3}e^{3t}\cos(2t)\right] dt$$

$$\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = \left[\frac{1}{3}e^{3t}\sin(2t)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\cos(2t)\right] dt$$

Dado que $\sin(2\pi) = \sin(0) = 0$*:*

$$\left[\frac{1}{3}e^{3t}\sin(2t)\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = -\frac{2}{3}\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\cos(2t)\right] dt$$

Para volver a integrar por partes usemos lo siguiente:

$$u = \cos(2t)$$

$$du = -2\sin(2t)dt$$

$$dv = e^{3t}dt$$

$$v = \frac{1}{3}e^{3t}$$

De este modo:

$$\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = -\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{3}e^{3t}\cos(2t)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2}{3}e^{3t}\sin(2t)dt\right\}$$

$$\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = -\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{3}e^{3t}\cos(2t)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3}\int_0^{\pi} e^{3t}\sin(2t)dt\right\}$$

$$\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = -\left[\frac{2}{9}e^{3t}\cos(2t)\right]_0^{\pi} - \frac{4}{9}\int_0^{\pi} e^{3t}\sin(2t)dt$$

Ahora, podemos despejar la integral que estamos buscando:

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right)\int_0^{\pi} \left[e^{3t}\sin(2t)\right] dt = -\left[\frac{2}{9}e^{3t}\cos(2t)\right]_0^{\pi}$$

$$\frac{13}{9}\int_0^{\pi}\left[e^{3t}\sin(2t)\right]dt = -\frac{2}{9}\left[e^{3\pi}\cos(2\pi) - e^{0}\cos(0)\right]$$

$$13\int_0^{\pi}\left[e^{3t}\sin(2t)\right]dt = -2\left(e^{3\pi}-1\right) = 2\left(1-e^{3\pi}\right)$$

$$\int_0^{\pi}\left[e^{3t}\sin(2t)\right]dt = \frac{2}{13}\left(1-e^{3\pi}\right)$$

Sustituyendo en I_2:

$$I_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left[\frac{2}{13}\left(1-e^{3\pi}\right)\right] = \frac{3}{13}\left(1-e^{3\pi}\right)\sqrt{2}$$

2. **Evalúe la integral de línea:**

$$\int_C x^2dx + xydy$$

a lo largo del cuadrado con vértices $(1,1)$**,** $(0,1)$**,** $(0,0)$**,** $(1,0)$**, siguiendo ese orden.**

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 1.):

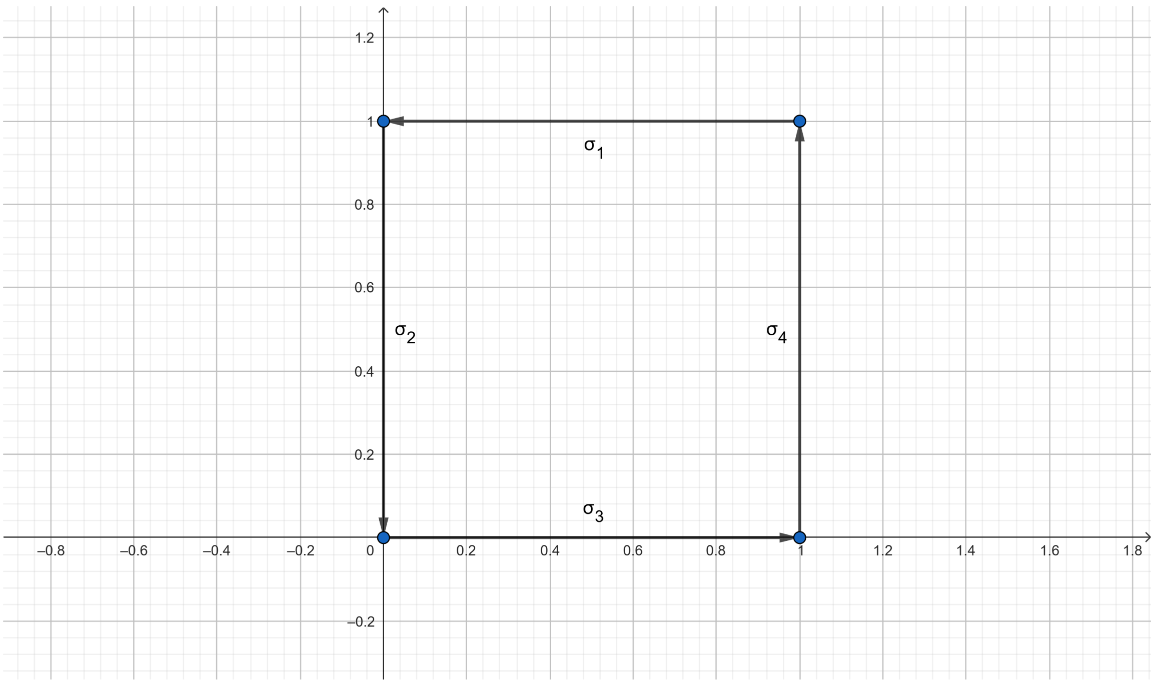

Figura 1. *Trayectoria C del problema 2.*

Debemos establecer las trayectorias que conforman a C:

$$\vec{\sigma}_1(t) = (1-t, 1)\,, \ \ t:[0,1]$$

$$\vec{\sigma}_2(t) = (0, 1-t)\,, \ \ t:[0,1]$$

$$\vec{\sigma}_3(t) = (t, 0)\,, \ \ t:[0,1]$$

$$\vec{\sigma}_4(t) = (1, t)\,, \ \ t:[0,1]$$

Encontrando las derivadas:

$$\vec{\sigma}_1'(t) = (-1, 0)$$

$$\vec{\sigma}_2'(t) = (0, -1)$$

$$\vec{\sigma}_3'(t) = (1, 0)$$

$$\vec{\sigma}_4'(t) = (0, 1)$$

Realizando la integral:

$$\int_C x^2dx + xydy = \int_{\vec{\sigma}_1} x^2dx + xydy + \int_{\vec{\sigma}_2} x^2dx + xydy + \int_{\vec{\sigma}_3} x^2dx + xydy + \int_{\vec{\sigma}_4} x^2dx + xydy$$

Realizando cada una de estas integrales por separado:

$$\int_{\vec{\sigma}_1} x^2dx + xydy = \int_0^1 (1-t)^2(-1)dt + (1-t)(1)(0)dt = -\int_0^1 (1-t)^2dt$$

$$\int_{\vec{\sigma}_2} x^2dx + xydy = \int_0^1 (0)^2(0)dt + (0)(1-t)(-1)dt = 0$$

$$\int_{\vec{\sigma}_3} x^2dx + xydy = \int_0^1 t^2(1)dt + (t)(0)(0)dt = \int_0^1 t^2dt$$

$$\int_{\vec{\sigma}_4} x^2dx + xydy = \int_0^1 (1)^2(0)dt + (1)(t)(1)dt = \int_0^1 tdt$$

Entonces:

$$\int_C x^2dx + xydy = -\int_0^1 (1-t)^2dt + \int_0^1 t^2dt + \int_0^1 tdt$$

$$\int_C x^2dx + xydy = \left[\frac{1}{3}(1-t)^3 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_C x^2dx + xydy = \left[\frac{1}{3}(1-1)^3 + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{1}{3}(1-0)^3 + \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2}\right]$$

$$\int_C x^2dx + xydy = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

3. **Sea la superficie $z = x^2 + y$, $D : [0,1] \times [-1,1]$. Evalúe la integral**

$$\int_S xdS$$

Primero, definamos el siguiente vector:

$$\vec{T} = (x, y, z) = (x, y, x^2 + y)$$

Ahora determinemos los siguientes vectores:

$$\vec{T_x} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x), \frac{\partial}{\partial x}(y), \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y)\right]$$

$$\vec{T_y} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(x), \frac{\partial}{\partial y}(y), \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y)\right]$$

Al realizar las debidas derivadas parciales:

$$\vec{T_x} = (1, 0, 2x)$$

$$\vec{T_v} = (0, 1, 1)$$

Ahora, realicemos el siguiente producto cruz:

$$\vec{T_x} \times \vec{T_y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2x)\hat{i} - (1)\hat{j} + (1)\hat{k} = -2x\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

Calculando la norma de $\vec{T_x} \times \vec{T_y}$:

$$\left\|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\right\| = \sqrt{(-2x)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4x^2+2}$$

Para determinar la integral que solicita el ejercicio:

$$\int_S x dS = \int_D x \left\|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\right\| dA = \int_{-1}^{1}\int_0^1 \left(x\sqrt{4x^2+2}\right) dxdy$$

$$\int_S x dS = \int_{-1}^{1} dy \int_0^1 \left(x\sqrt{4x^2+2}\right) dx = [y]_{-1}^{1} \int_0^1 \left(x\sqrt{4x^2+2}\right) dx$$

$$\int_S x dS = [1-(-1)] \int_0^1 \left(x\sqrt{4x^2+2}\right) dx = 2\int_0^1 \left(x\sqrt{4x^2+2}\right) dx$$

Ahora, consideremos la siguiente sustitución:

$$u = 4x^2 + 2$$

$$du = 8xdx$$

De este modo:

$$\int_S x dS = 2\int_{u_1}^{u_2} \left(\sqrt{u}\right)\frac{du}{8} = \frac{1}{4}\int_{u_1}^{u_2} u^{1/2} du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u_1}^{u_2} = \frac{1}{6}\left[(4x^2+2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$\int_S x dS = \frac{1}{6}\left\{\left[(4(1)^2+2)^{3/2}\right] - \left[(4(0)^2+2)^{3/2}\right]\right\} = \frac{1}{6}\left(6^{3/2} - 2^{3/2}\right)$$

Reorganizando términos:

$$\int_S x dS = \frac{1}{6}\left(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right) = \sqrt{6} - \frac{1}{3}\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)$$

4. **Evalúe la integral**

$$\int_S \vec{r}\cdot d\vec{S}$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$, y S es la esfera unitaria.

Sabemos que en coordenadas esféricas:

$$x = R\sin\phi\cos\theta$$

$$y = R\sin\phi\sin\theta$$

$$z = R\cos\phi$$

Donde $R = 1$ *en el caso de la esfera unitaria. Ahora, definamos el siguiente vector:*

$$\vec{r} = (x, y, z) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

Ahora determinemos los siguientes vectores:

$$\vec{r}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\phi\cos\theta), \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\phi\sin\theta), \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\phi)\right]$$

$$\vec{r}_\phi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \left[\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\cos\theta), \frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\sin\theta), \frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi)\right]$$

Al realizar las debidas derivadas parciales:

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$$

$$\vec{r}_\phi = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$$

Ahora, realicemos el siguiente producto cruz:

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\phi\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = (-\sin^2\phi\cos\theta)\hat{i} - (\sin^2\phi\sin\theta)\hat{j} + (-\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta - \sin\phi\cos\phi\cos^2\theta)\hat{k}$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = -(\sin^2\phi\cos\theta)\hat{i} - (\sin^2\phi\sin\theta)\hat{j} - \left[\sin\phi\cos\phi(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\right]\hat{k}$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = -(\sin^2\phi\cos\theta)\hat{i} - (\sin^2\phi\sin\theta)\hat{j} - (\sin\phi\cos\phi)\hat{k}$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = -\sin\phi\left[(\sin\phi\cos\theta)\hat{i} + (\sin\phi\sin\theta)\hat{j} + (\cos\phi)\hat{k}\right]$$

Pero si observamos con detenimiento, podemos hacer la siguiente sustitución:

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi = -(\sin\phi)\vec{r}$$

Aunque, para este problema en particular ocupamos que el vector radial siempre apunte hacia afuera, por lo que:

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = (\sin\phi)\vec{r}$$

Ahora realicemos la integral que propone inicialmente el problema:

$$\int_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{r}\cdot(\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta)d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{r}\cdot(\sin\phi)\vec{r}d\phi d\theta$$

$$\int_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin\phi)\left\|\vec{r}\,\right\|^2 d\phi d\theta$$

Pero:

$$\left\|\vec{r}\,\right\|^2 = x^2+y^2+z^2 = 1$$

Entonces:

$$\int_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin\phi)d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}(\sin\phi)d\phi = [\theta]_0^{2\pi}\,[\cos\phi]_\pi^0$$

$$\int_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = (2\pi - 0)\,[\cos(0)-\cos(\pi)] = 2\pi\,[1-(-1)] = 2\pi(2) = 4\pi$$

5. **Determine el plano tangente a la superficie $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$ en el punto $(-1/4, 1/2, 2)$.**

   Primero, definamos el vector:

$$\vec{T} = (u^2 - v^2, u+v, u^2+4v)$$

Ahora determinemos los siguientes vectores:

$$\vec{T}_u = \frac{\partial\vec{T}}{\partial u} = \left[\frac{\partial}{\partial u}(u^2-v^2), \frac{\partial}{\partial u}(u+v), \frac{\partial}{\partial u}(u^2+4v)\right]$$

$$\vec{T}_v = \frac{\partial\vec{T}}{\partial v} = \left[\frac{\partial}{\partial v}(u^2-v^2), \frac{\partial}{\partial v}(u+v), \frac{\partial}{\partial v}(u^2+4v)\right]$$

Al realizar las debidas derivadas parciales:

$$\vec{T}_u = (2u, 1, 2u)$$

$$\vec{T}_v = (-2v, 1, 4)$$

Ahora, realicemos el siguiente producto cruz:

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2u & 1 & 2u \\ -2v & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4-2u)\hat{i} - (8u + 4uv)\hat{j} + (2u + 2v)\hat{k}$$

El siguiente paso es establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\vec{T} = (u^2 - v^2, u + v, u^2 + 4v) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

$$u^2 - v^2 = -\frac{1}{4}$$

$$u + v = \frac{1}{2}$$

$$u^2 + 4v = 2$$

Hagamos la siguiente resta:

$$u^2 + 4v - (u^2 - v^2) = 2 - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$4v + v^2 = \frac{9}{4}$$

$$v^2 + 4v - \frac{9}{4} = 0$$

La ecuación cuadrática anterior tiene como soluciones:

$$v_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_2 = -\frac{9}{2}$$

Por ende:

$$u_1 = \frac{1}{2} - v_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - v_2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{9}{2}\right) = 5$$

Sin embargo, la única opción que cumple con las tres ecuaciones simultáneamente es:

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = \frac{1}{2}$$

Reemplazando u_1, v_1 *en* $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$*:*

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = [4 - 2(0)]\,\hat{\imath} - \left[8(0) + 4(0)\left(\frac{1}{2}\right)\right]\hat{\jmath} + \left[2(0) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right]\hat{k} = 4\hat{\imath} + \hat{k}$$

A este nuevo vector lo denominaremos:

$$\vec{n} = 4\hat{\imath} + \hat{k}$$

Para obtener el plano tangente, debemos realizar el siguiente producto punto:

$$\vec{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Donde:

$$x_0 = -\frac{1}{4}$$

$$y_0 = \frac{1}{2}$$

$$z_0 = 2$$

Entonces:

$$(4, 0, 1) \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{4}\right), y - \frac{1}{2}, z - 2\right] = 0$$

$$(4, 0, 1) \cdot \left(x + \frac{1}{4}, y - \frac{1}{2}, z - 2\right) = 0$$

$$4\left(x + \frac{1}{4}\right) + (z - 2) = 0$$

$$4x + 1 + z - 2 = 0$$

$$4x + z - 1 = 0$$

Reorganizando términos:

$$4x + z = 1$$

6. **Calcule el área al interior de la hipocicloide definida por $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$, usando la parametrización**

$$x = a\cos^3 t$$

$$y = a\sin^3 t$$

con dominio $t : [0, 2\pi]$.

Utilizaremos la fórmula del área para curvas planas parametrizadas:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right] dt$$

En primer lugar, determinaremos las derivadas:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t \cos t$$

Sustituyendo:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(a\cos^3 t)(3a\sin^2 t\cos t) - (a\sin^3 t)(-3a\cos^2 t\sin t)\right] dt$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\cos^2 t\sin^4 t\right) dt$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3a^2\cos^2 t\sin^2 t\right)\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(3a^2\cos^2 t\sin^2 t\right) dt$$

Podemos usar la identidad trigonométrica $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$*:*

$$A = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t)^2 \, dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]^2 dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}\sin^2(2t)\right] dt$$

$$A = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(2t)\right] dt$$

Y como:

$$\sin^2(2t) = \frac{1-\cos(4t)}{2}$$

Podemos simplificar la integral:

$$A = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1-\cos(4t)}{2}\right] dt = \frac{3}{16}a^2 \int_0^{2\pi} [1-\cos(4t)] \, dt = \frac{3}{16}a^2 \left[t - \frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{2\pi}$$

$$A = \frac{3}{16}a^2 \left\{\left[2\pi - \frac{1}{4}\sin(8\pi)\right] - \left[0 - \frac{1}{4}\sin(0)\right]\right\} = \frac{3}{16}a^2 (2\pi) = \frac{3}{8}\pi a^2$$