Primer Examen Parcial
Calculo III

Agosto 2024

1. **Usando métodos vectoriales, escriba la forma del plano generado por los puntos (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).**

   Un plano es un conjunto de puntos (x, y, z) organizados de una forma concreta, que al ser ubicados en el espacio cartesiano dibujan lo que conocemos cualitativamente como un plano.
   Así pues, primeramente debemos recordar que un plano lo podemos construir a partir de dos vectores; un vector completamente paralelo y contenido en el plano, y otro perpendicular. De manera que el producto punto entre dos vectores perpendiculares es cero.
   De este modo, nosotros conocemos tres puntos que pertenecen al plano $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$, con ellos necesitamos construir un vector que sea perpendicular al plano y otro paralelo a este.

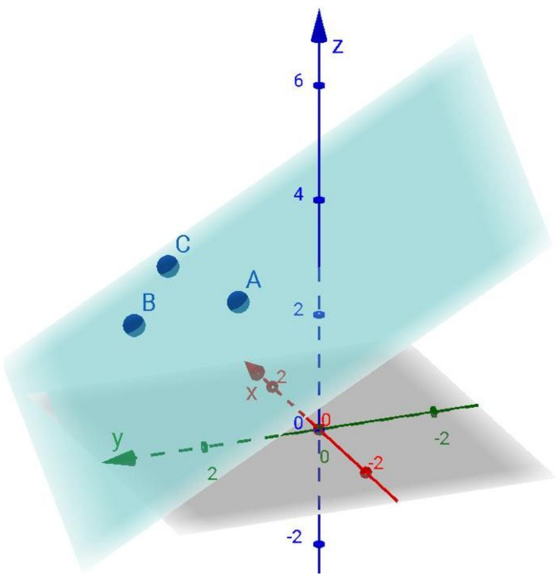

Figura 1: *Podemos construir un plano si conocemos tres puntos A, B, C que pertenecen a este, a partir de los puntos construimos un vector perpendicular al plano y otro paralelo.*

Para determinar el vector paralelo necesitamos conocer un punto del plano como el $A(x_0, y_0, z_0)$, y un punto arbitrario (x, y, z) que supondremos también pertenece al plano:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

Luego, para determinar el vector perpendicular, recordemos que el producto cruz o vectorial de dos vectores nos da un vector perpendicular a ambos, así que necesitamos otros dos vectores paralelos al plano para poder realizar su producto vectorial y tener el vector perpendicular. Dichos vectores los obtenemos de la resta del vector C con A, y B con A, es decir:

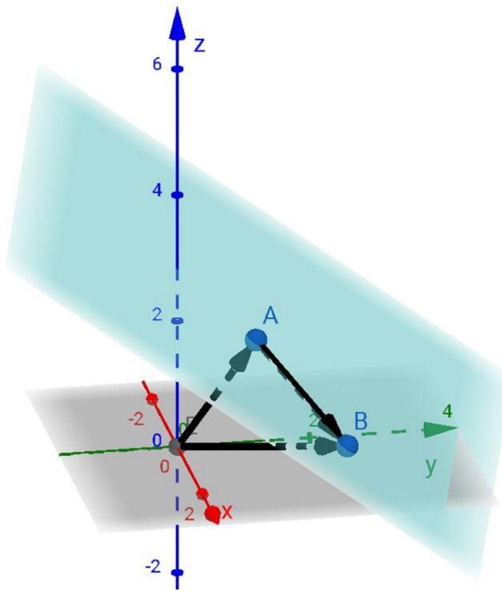

Figura 2: *Ya que los puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ pertenecen al plano, si restamos sus vectores correspondientes, obtenemos un vector que va de un punto al otro y por tanto es completamente paralelo al plano. Lo mismo ocurre si restamos el vector correspondiente $C(x_2, y_2, z_2)$ con $A(x_0, y_0, z_0)$.*

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{1y} \\ w_{1z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto cruz entre $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$ para obtener un vector perpendicular a estos, y por tanto al plano:

$$\vec{v} = \vec{w_1} \times \vec{w_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_{1x} & w_{1y} & w_{1z} \\ w_{2x} & w_{2y} & w_{2z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1y}w_{2z} - w_{2y}w_{1z} \\ w_{2x}w_{1z} - w_{1x}w_{2z} \\ w_{1x}w_{2y} - w_{2x}w_{1y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w_1} \times \vec{w_2} = \begin{bmatrix} (y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0) \\ (x_2 - x_0)(z_1 - z_0) - (x_1 - x_0)(z_2 - z_0) \\ (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

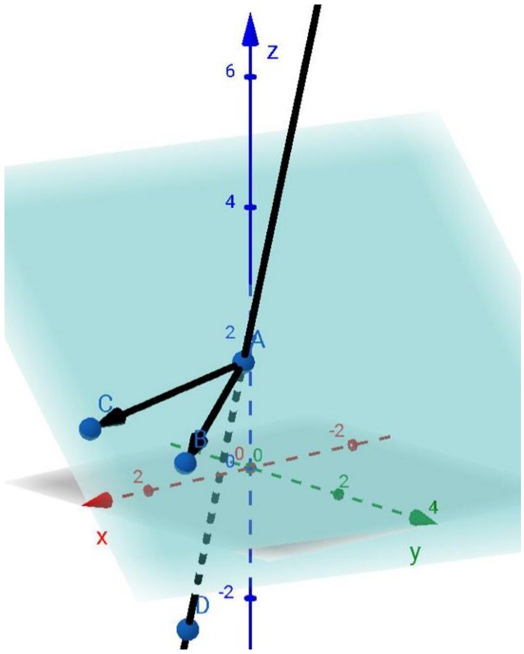

Figura 3: *Ya que los vectores que van del punto A al C y de A a B son paralelos al plano y ademas están contenidos en este, el producto cruz de estos nos dará un vector perpendicular a ambos y por tanto al plano.*

Así pues, todos los puntos (x, y, z) *que cumplan* $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ *serán el conjunto de puntos que forman el plano que buscamos:*

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} (y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0) \\ (x_2 - x_0)(z_1 - z_0) - (x_1 - x_0)(z_2 - z_0) \\ (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) + v_z(z - z_0) = 0$$

Así finalmente obtenemos una formula general para obtener la ecuación de algún plano si conocemos los tres puntos que pertenecen a este plano, fijémonos que v_x, v_y, v_z *son los coeficientes, que quedan determinados según las coordenadas de los puntos A, B, C.*

2. **¿Es igual a cero** $||8i - 12k|| \cdot ||6j + k|| - |(8i - 12k) \cdot (6j + k)|$ **?**

   Para comprobar si realmente la operación nos da cero, calculemos termino por termino:

$$||8i - 12k|| = \sqrt{8^2 + (-12)^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208}$$

$$||6j+k|| = \sqrt{6^2+1^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

$$||8i-12k|| \cdot ||6j+k|| = \sqrt{208}\sqrt{37} = 87{,}727$$

$$(8i-12k)\cdot(6j+k) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 8\cdot 0 + 0\cdot 6 + (-12)\cdot 1 = -12$$

$$|-12| = 12$$

Entonces podemos ver que la igualdad no se cumple

3. **Hallar dos vectores no paralelos, ambos ortogonales a** $(1, 1, -1)$

   Para que dos vectores sean ortogonales debe cumplirse que su producto punto sea cero, es decir, si un vector arbitrario (x, y, z) *es perpendicular al nuestro, debe cumplirse que:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - z = 0$$

Así, cualquier vector cuyas componentes cumplan con la ecuación de este plano, sera un vector perpendicular al nuestro. Por comodidad tomamos $x = 1$, $y = 1$ y $z = x + y = 2$. Luego, para obtener un vector perpendicular a estos dos últimos, calculamos su producto cruz, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, en la figura, nuestro vector original esta ubicado por el punto C, mientras que A es el primer vector perpendicular, resultante del producto punto, mientras que D resulta del producto cruz entre el vector original C y el vector ubicado por A.

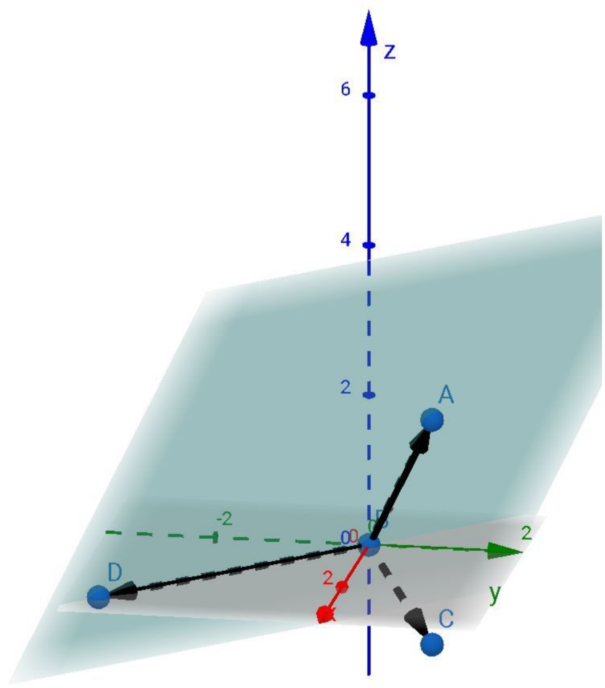

Figura 4: *Todos los vectores cuyas componentes cumplan con la ecuación del plano, serán perpendiculares a nuestro vector.*

4. **Hallar la distancia al punto $(6, 1, 0)$ del plano que pasa por el origen y es perpendicular a $(1, -2, 1)$.**

   Nuevamente la ecuación del plano la encontramos bajo la condición de que el producto punto es nulo entre dos vectores perpendiculares:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - 2y + z = 0$$

   Ya que este examen es de calculo vectorial, no vasta con utilizar la formula que nos dice la distancia entre un punto y un plano, es decir, para un plano cuya ecuación es $Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ la distancia mínima entre estos dos sera:

$$D = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

   En su lugar, consideremos el vector que va del origen a nuestro punto $B(6, 1, 0)$, ya que nos dicen que el vector $A(1, -2, 1)$ es perpendicular al plano, resulta que si nosotros calculamos la proyección de B sobre A, estaremos calculando justamente lo que buscamos, la distancia entre el plano y el punto. Así que el problema se reduce a estimar esta proyección.

$$D = proy(\vec{B}, \vec{A})$$

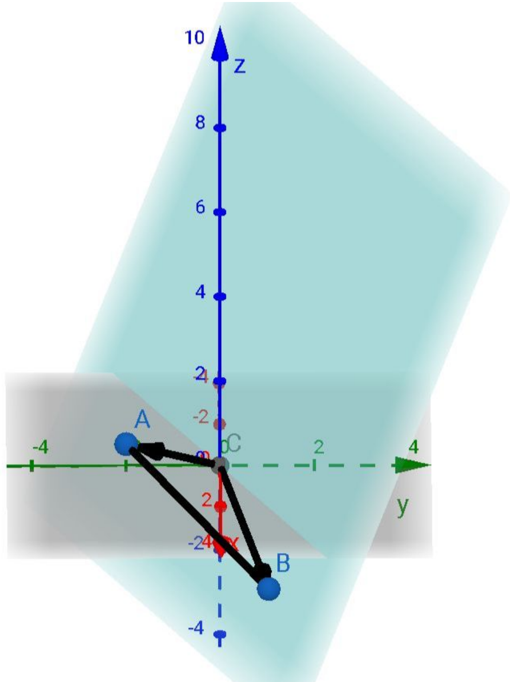

Figura 5: *Lo que buscamos es la distancia del punto B al plano. Esta distancia es equivalente a la proyección de B sobre A, pues la linea perpendicular que va del plano al punto B es completamente paralela a esta proyección.*

Para calcular la proyección, recordemos que el significado geométrico del producto punto, se asocia justamente a proyecciones entre vectores, es decir, consideremos los vectores $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$*, como lo muestra la siguiente figura, la proyección de* $\vec{B}$ *sobre* $\vec{A}$ *es* $|\vec{B}|\cos\theta$*, así pues fijémonos que del producto punto entre estos dos vectores podemos despejar esta cantidad:*

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{B}|\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = proy(\vec{B},\vec{A})$$

Entonces, ahora solo nos resta realizar esta operación con nuestros vectores.

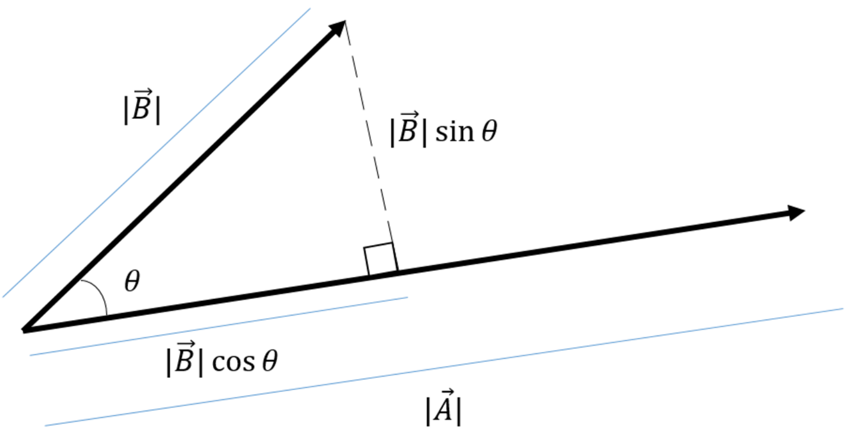

Figura 6: *La proyección del vector* $\vec{B}$ *sobre el vector* $\vec{A}$ *esta dada por* $|\vec{B}|\cos\theta$*.*

$$D = \frac{(1,-2,1)\cdot(6,1,0)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1\cdot(6)-2\cdot(1)+0\cdot(1)}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Hacer esto es equivalente a usar la formula del inicio, ya que esta se deduce de un planteamiento igual.