Primer Examen Parcial
Física General III

Agosto 2022

1. **Describa y explique ampliamente los siguientes conceptos:**

   a) **Carga eléctrica:** Es una propiedad intrínseca de la materia. Por convención se clasifica en carga positiva o negativa. También existe la carga neutra, aunque se refiere a que cargas positivas y negativas se encuentran en las misma cantidad. La carga está cuantizada, y cada electrón tiene carga de $-1.6 \times 10^{-19}\,C$. Además, las cargas adicionales son múltiplos de esta carga fundamental. Su unidad en el sistema internacional es el Coulomb (C). En presencia de otra carga presenta fuerzas de atracción o repulsión, y la carga en un sistema cerrado se transfiere sin pérdida, es decir, es constante.

   b) **Ley de Coulomb:** Dicha ley toma como argumento las interacciones de atracción o repulsión que presentan dos cargas cuando se colocan con una cierta distancia de separación. La fuerza de atracción se da cuando una carga es positiva y otra negativa, mientras que la fuerza de repulsión cuando ambas cargas tienen el mismo signo. La dirección de la fuerza se encuentra en la linea de acción que une ambas cargas. Esta ley propone que F es inversamente proporcional a r^2 y directamente proporcional a $|q_1 q_2|$. En general, se expresa como:

   $$\vec{F} = \frac{k\,|q_1 q_2|}{r^2}\hat{r}$$

   Donde $\hat{r}$ apunta en dirección saliente de la linea de acción que une ambas cargas.

   c) **Campo eléctrico:** Es un campo vectorial (donde a cada punto del espacio se le asocia un vector) en el espacio que se genera por la presencia de una carga eléctrica. Rodea a la carga que lo genera, y es el encargado de la interaccionar (a través de la ley de Coulomb) con otra carga que se encuentre en la vecindad del campo. La intensidad de este campo depende de la carga eléctrica, y para dar cuenta de ello es necesario una carga de prueba q_0. Si el campo $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $\vec{F}$, y su unidad en el SI es el N/C. En un punto dado del espacio circundante, $\vec{E}$ se define como la fuerza por unidad de carga en cada punto. Se expresa como:

   $$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ indica la dirección de $\vec{E}$ en el punto que se desea determinar.

d) **Lineas de campo:** Para dibujarlas se requiere de una carga de prueba q_0, y que dicha carga se coloque en distintos puntos para visualizar los vectores de $\vec{F}$ y $\vec{E}$ en el espacio. Posteriormente se unen dichos vectores en diferentes lineas, las cuales son lineas de campo. Dichas lineas:

- Salen de las cargas positiva y entran en las negativas.
- La intensidad del campo es proporcional al número de lineas.
- La magnitud del campo es proporcional a la densidad del número de lineas de campo por área.
- Son lineas continuas y nunca se cruzan.
- Los vectores de $\vec{F}$ ó $\vec{E}$ son tangentes a dichas lineas.

e) **Flujo eléctrico:** Se define como el número de lineas de campo eléctrico que fluyen por un área determinada. Matemáticamente, el flujo de campo eléctrico se expresa como:

$$\phi_E = \left\|\vec{E}\right\| \left\|\vec{A}\right\| \cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} A$$

Donde $\hat{n}$ es el vector normal al área A. Con ello, θ es el ángulo entre los vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$. Si la superficie no es plana y el campo eléctrico es uniforme:

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Donde el vector $d\vec{A}$ siempre apunta hacia afuera de la superficie. Las lineas de flujo que entran a la superficie generan un flujo negativo, mientras que las lineas de campo que salen de la superficie resultan en un flujo positivo.

f) **Ley de Gauss:** Es una de las ecuaciones de Maxwell. Dicha ley permite encontrar la magnitud de $\vec{E}$ por medio de una superficie gaussiana esférica o cilíndrica (no importa la forma del objeto, siempre se cumple). En dicha ley, el flujo neto de campo eléctrico en una superficie cerrada es $1/\epsilon_0$ veces la carga encerrada en la superficie gaussiana. Se expresa como:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

2. **Se dispara un electrón a un ángulo de $\theta = 30°$ sobre la horizontal a la mitad entre dos placas paralelas de $4\,cm$ longitud y $1\,cm$ de separación. Encuentre los valores mínimo y máximo de rapidez inicial v_0 para que el electrón no choque con ninguna de las dos placas.**

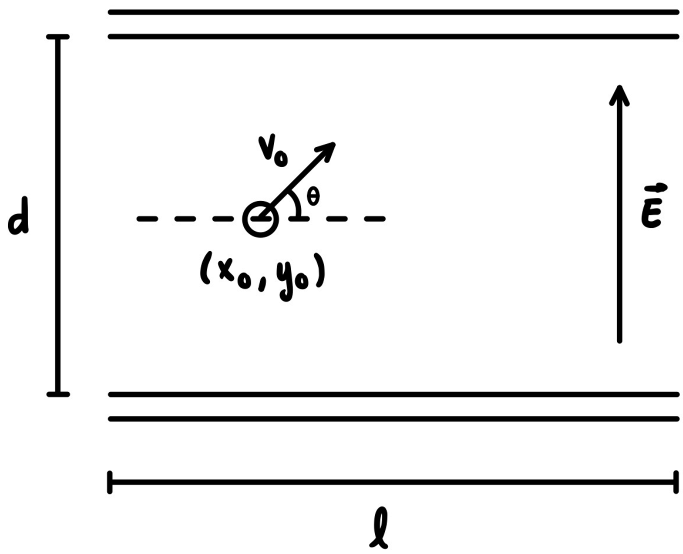

Figura 1. *Electrón disparado entre placas paralelas.*

Debido a la ambigüedad del problema, inicialmente consideraremos que el punto de lanzamiento del electrón es en la coordenadas (x_0, y_0). También, definiremos $d = 1\,cm$ y $l = 4\,cm$. Debido al campo eléctrico entre las placas, el movimiento será parabólico, por lo que:

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)t$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Utilizando la segunda ley de Newton en el eje y:

$$F_y = m_e a_y = eE$$

$$a_y = \frac{eE}{m_e}$$

Donde e es la carga del electrón, la cual es negativa. Reemplazando:

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)t + \frac{eE}{2m_e}t^2$$

Primero, buscamos el tiempo cuando la partícula alcanza la coordenada $(l, 0)$:

$$l = x_0 + (v_0 \cos\theta)t - min$$

$$0 = y_0 + (v_0 \sin\theta)t_{min} + \frac{eE}{2m_e}t_{min}^2$$

Despejando t:

$$t_{min} = \frac{l - x_0}{v_0 \cos\theta}$$

$$0 = y_0 + (v_0 \sin\theta)\left(\frac{l - x_0}{v_0 \cos\theta}\right) + \frac{eE}{2m_e}\left(\frac{l - x_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$0 = y_0 + (\tan\theta)(l - x_0) + \frac{eE(l - x_0)^2}{2m_e v_0^2 \cos^2\theta}$$

Despejando v_0:

$$-\frac{eE(l - x_0)^2}{2m_e v_0^2 \cos^2\theta} = y_0 + (\tan\theta)(l - x_0)$$

$$-\frac{eE(l - x_0)^2}{2m_e[y_0 + (\tan\theta)(l - x_0)]\cos^2\theta} = v_0^2$$

Reemplazando $\theta = 30°$, considerando que el campo eléctrico entre placas paralelas es $E = \sigma/\epsilon_0$:

$$v_0^2 = -\frac{e\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(l - x_0)^2}{2m_e[y_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(l - x_0)]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{e\sigma(l - x_0)^2}{m_e\epsilon_0[y_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(l - x_0)]\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$v_0^2 = -\frac{2e\sigma(l - x_0)^2}{3m_e\epsilon_0[y_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(l - x_0)]} = -\frac{2e\sigma(l - x_0)^2}{m_e\epsilon_0[3y_0 + \sqrt{3}(l - x_0)]}$$

Suponiendo que el problema se refiere a que el electrón es disparado desde la coordenadas $(0, d/2)$:

$$v_0^2 = -\frac{2e\sigma(l)^2}{m_e\epsilon_0[3\left(\frac{d}{2}\right) + \sqrt{3}(l)]} = -\frac{4e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d + 2l\sqrt{3})}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{4e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d + 2l\sqrt{3})}}$$

Suponiendo que el problema se refiere a que el electrón es disparado desde la coordenadas $(l/2, d/2)$:

$$v_0^2 = -\frac{2e\sigma\left(l-\frac{l}{2}\right)^2}{m_e\epsilon_0[3\left(\frac{d}{2}\right)+\sqrt{3}\left(l-\frac{l}{2}\right)]} = -\frac{2e\sigma\left(\frac{l}{2}\right)^2}{m_e\epsilon_0[3\left(\frac{d}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{l}{2}\right)]} = -\frac{4e\sigma\left(\frac{l^2}{4}\right)}{m_e\epsilon_0(3d+l\sqrt{3})}$$

$$v_0^2 = -\frac{e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d+l\sqrt{3})}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d+l\sqrt{3})}}$$

Esta es la velocidad mínima para el electrón. Ahora, debemos buscar el tiempo cuando la partícula alcance su altura máxima, ya que, si $y_{max} = d$ el electrón chocará con la placa de arriba. Para ello:

$$v_y = v_0 \sin\theta + \frac{eE}{m_e}t$$

En su altura máxima, $v_y = 0$, por lo que:

$$0 = v_0 \sin\theta + \frac{eE}{m_e}t_{max}$$

$$t_{max} = -\frac{m_e v_0 \sin\theta}{eE}$$

Reemplazando t_{max} en y:

$$y = y_0 + (v_0\sin\theta)\left(-\frac{m_e v_0 \sin\theta}{eE}\right) + \frac{eE}{2m_e}\left(-\frac{m_e v_0\sin\theta}{eE}\right)^2$$

$$y = y_0 - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{eE} + \frac{eE}{2m_e}\left(\frac{m_e^2 v_0^2 \sin^2\theta}{e^2E^2}\right) = y_0 - \frac{m_e v_0^2\sin^2\theta}{eE} + \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

$$y = y_0 - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

Notemos que en ambos casos planteados por la ambigüedad, $y_0 = d/2$. También debemos imponer que $y = d$ sea la distancia máxima que pueda tomar el electrón, ya que, si $y > d$ la partícula colisionará con la placa de arriba. Por ende:

$$d = \frac{d}{2} - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

$$\frac{d}{2} = -\frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

$$v_0^2 = -\frac{eEd}{m_e \sin^2\theta}$$

Reemplazando $\theta = 30°$, *considerando que el campo eléctrico entre placas paralelas es* $E = \sigma/\epsilon_0$*:*

$$v_0^2 = -\frac{e\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)d}{m_e\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{e\sigma d}{m_e\epsilon_0\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{4e\sigma d}{m_e\epsilon_0}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{4e\sigma d}{m_e\epsilon_0}}$$

Por último, debemos reemplazar d *y* l *en la velocidad mínima, y* d *velocidad máxima (en cada uno de los dos casos). De preferencia, se debería hacer la conversión a metros de dichas cantidades, pero esto queda como ejercicio para el lector.*

3. **Tres cargas puntuales** q**,** $-2q$ **y** q**, se encuentran localizadas sobre el eje** x **con coordenadas** $(-a, 0)$**,** $(0, 0)$ **y** $(a, 0)$**, respectivamente. Determine el campo eléctrico en un punto** P **sobre el eje** y **cuando (a)** $y > a$ **y en el caso (b)** $y < a$**.**

   Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 2.):

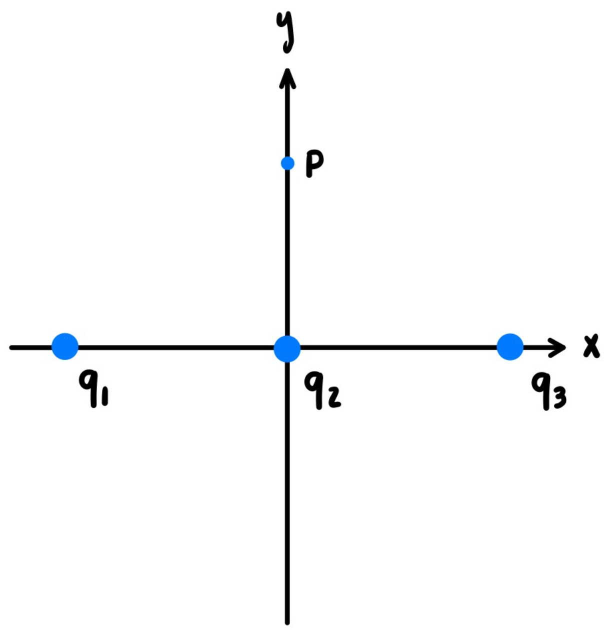

Figura 2. *Arreglo de cargas del problema 3.*

De la Figura 2. definimos $q_1 = q$, $q_2 = -2q$ y $q_3 = q$. También definimos los siguientes vectores:

$$\vec{r}_1 = (-a, 0)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0)$$

$$\vec{r}_a = (a, 0)$$

$$\vec{r}_p = (0, y)$$

Para determinar el campo eléctrico de cada carga q_i al punto P utilizaremos la siguiente expresión:

$$\vec{E}_i = \frac{kq_i}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_i\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_i)$$

Para determinar $\vec{E}_1$:

$$\vec{r}_p - \vec{r}_1 = (0, y) - (-a, 0) = (a, y)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_1\| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_1) = \frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}(a, y)$$

Para determinar $\vec{E}_2$:

$$\vec{r}_p - \vec{r}_2 = (0, y) - (0, 0) = (0, y)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_2\| = \sqrt{y^2} = y$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_2) = \frac{k(-2q)}{y^3}(0, y) = -\frac{2kq}{y^2}(0, 1)$$

Para determinar $\vec{E}_3$:

$$\vec{r}_p - \vec{r}_3 = (0, y) - (a, 0) = (-a, y)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_3\| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{kq_3}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_3\|^3}\left(\vec{r}_p - \vec{r}_3\right) = \frac{kq}{(a^2+y^2)^{3/2}}(-a, y)$$

Para encontrar el campo eléctrico total sobre el punto P:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E}_T = \frac{kq}{(a^2+y^2)^{3/2}}(a, y) - \frac{2kq}{y^2}(0,1) + \frac{kq}{(a^2+y^2)^{3/2}}(-a, y)$$

$$\vec{E}_T = \frac{2kq}{(a^2+y^2)^{3/2}}(0, y) - \frac{2kq}{y^2}(0,1) = 2kq\left[\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

Para el inciso (a) se cumple que $a/y < 1$. Entonces, podemos realizar la siguiente expansión en serie:

$$\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2 - \cdots$$

Entonces:

$$\vec{E}_T = 2kq\left[\frac{y}{y^3\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j} = 2kq\left[\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2kq}{y^2}\left[\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2} - 1\right]\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2 - \cdots - 1\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2kq}{y^2}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2 - \cdots\right]\hat{j}$$

Dado que $a/y < 1$, podemos cortar la suma al primer término:

$$\vec{E}_T \approx \frac{2kq}{y^2}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)\right]\hat{j} = -3kq\left(\frac{a^2}{y^4}\right)\hat{j}$$

Para el inciso (b) se cumple que $y/a < 1$. Entonces, podemos realizar la siguiente expansión en serie:

$$\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{y^2}{a^2}\right)^2 - \cdots$$

Entonces:

$$\vec{E}_T = 2kq\left[\frac{y}{a^3\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j} = 2kq\left[\frac{y}{a^3}\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{-3/2} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = 2kq\left\{\frac{y}{a^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{y^2}{a^2}\right)^2 - \cdots\right] - \frac{1}{y^2}\right\}\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = 2kq\left[\frac{y}{a^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{y^3}{a^5}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{y^5}{a^7}\right) - \cdots - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

Dado que $y/a < 1$, podemos cortar la suma al primer término:

$$\vec{E}_T \approx 2kq\left(\frac{y}{a^3} - \frac{1}{y^2}\right)\hat{j} = 2kqy\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{y^3}\right)\hat{j}$$

4. **Una esfera de radio R tiene una distribución de carga esféricamente simétrica la cual esta dada por la ecuación $\rho = a/r$, donde a es una constante cualquiera.**
   a) **Determine el campo eléctrico que origina dicha distribución para $r > R$.**
   b) **Para $r < R$.**

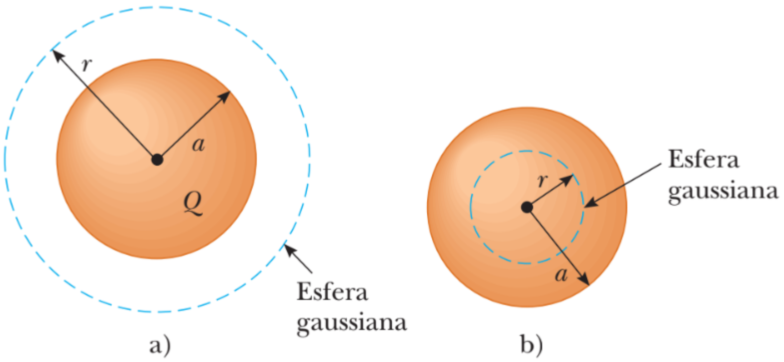

Figura 3. *Superficies gaussianas para la esfera de radio R.*

Para resolver este problema usaremos la ley de Gauss, basándonos en las superficies gaussianas mostradas en la Figura 3. considerando que el radio de la esfera no es a, sino R como dice el problema inicialmente. Por la simetría del problema, el campo eléctrico debe ser radial. Además, dA también es radial, por lo que:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_S E dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\int_S dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Como el área debe ser el de la esfera gaussiana de radio r:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Para determinar Q_{enc} en el inciso a):

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \left(\frac{a}{r}\right) \left(r^2 \sin\theta\right) dr d\theta d\phi$$

$$Q_{enc} = a \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta)\, d\theta \int_0^{R} (r)\, dr = a\, [\phi]_0^{2\pi} \, [\cos\theta]_{\pi}^{0} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

Evaluando:

$$Q_{enc} = a\,(2\pi - 0)\,[\cos(0) - \cos(\pi)] \left(\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = a(2\pi)\,[1 - (-1)] \left(\frac{R^2}{2}\right) = 2\pi a R^2$$

Reemplazando:

$$E(4\pi r^2) = \frac{2\pi a R^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2\pi a R^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 2\pi k a \frac{R^2}{r^2}$$

Para determinar Q_{enc} en el inciso b):

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \left(\frac{a}{r}\right) \left(r^2 \sin\theta\right) dr d\theta d\phi$$

$$Q_{enc} = a \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta)\, d\theta \int_0^{r} (r)\, dr = a\, [\phi]_0^{2\pi} \, [\cos\theta]_{\pi}^{0} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r$$

Evaluando:

$$Q_{enc} = a\,(2\pi - 0)\,[\cos(0) - \cos(\pi)] \left(\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = a(2\pi)\,[1 - (-1)] \left(\frac{r^2}{2}\right) = 2\pi a r^2$$

Reemplazando:

$$E(4\pi r^2) = \frac{2\pi a r^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2\pi a r^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 2\pi k a$$

Como tal, la respuesta a este problema es:

$$\vec{E} = 2\pi k a \frac{R^2}{r^2}, \;\; r > R$$

$$\vec{E} = 2\pi k a, \;\; 0 < r \leq R$$