# Primer Examen Parcial
# Física General III

Agosto 2023

1. **Describa y explique ampliamente los siguientes conceptos:**

   a) **Carga eléctrica:** Es una propiedad intrínseca de la materia. Por convención se clasifica en carga positiva o negativa. También existe la carga neutra, aunque se refiere a que cargas positivas y negativas se encuentran en las misma cantidad. La carga está cuantizada, y cada electrón tiene carga de $-1.6 \times 10^{-19}\,C$. Además, las cargas adicionales son múltiplos de esta carga fundamental. Su unidad en el sistema internacional es el Coulomb ($C$). En presencia de otra carga presenta fuerzas de atracción o repulsión, y la carga en un sistema cerrado se transfiere sin pérdida, es decir, es constante.

   b) **Ley de Coulomb:** Dicha ley toma como argumento las interacciones de atracción o repulsión que presentan dos cargas cuando se colocan con una cierta distancia de separación. La fuerza de atracción se da cuando una carga es positiva y otra negativa, mientras que la fuerza de repulsión cuando ambas cargas tienen el mismo signo. La dirección de la fuerza se encuentra en la linea de acción que une ambas cargas. Esta ley propone que $F$ es inversamente proporcional a $r^2$ y directamente proporcional a $|q_1 q_2|$. En general, se expresa como:

   $$\vec{F} = \frac{k\,|q_1 q_2|}{r^2}\hat{r}$$

   Donde $\hat{r}$ apunta en dirección saliente de la linea de acción que une ambas cargas.

   c) **Campo eléctrico:** Es un campo vectorial (donde a cada punto del espacio se le asocia un vector) en el espacio que se genera por la presencia de una carga eléctrica. Rodea a la carga que lo genera, y es el encargado de la interaccionar (a través de la ley de Coulomb) con otra carga que se encuentre en la vecindad del campo. La intensidad de este campo depende de la carga eléctrica, y para dar cuenta de ello es necesario una carga de prueba $q_0$. Si el campo $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $\vec{F}$, y su unidad en el SI es el $N/C$. En un punto dado del espacio circundante, $\vec{E}$ se define como la fuerza por unidad de carga en cada punto. Se expresa como:

   $$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

Donde $\hat{r}$ indica la dirección de $\vec{E}$ en el punto que se desea determinar.

d) **Lineas de campo:** Para dibujarlas se requiere de una carga de prueba $q_0$, y que dicha carga se coloque en distintos puntos para visualizar los vectores de $\vec{F}$ y $\vec{E}$ en el espacio. Posteriormente se unen dichos vectores en diferentes lineas, las cuales son lineas de campo. Dichas lineas:

- Salen de las cargas positiva y entran en las negativas.
- La intensidad del campo es proporcional al número de lineas.
- La magnitud del campo es proporcional a la densidad del número de lineas de campo por área.
- Son lineas continuas y nunca se cruzan.
- Los vectores de $\vec{F}$ ó $\vec{E}$ son tangentes a dichas lineas.

e) **Ley de Gauss:** Es una de las ecuaciones de Maxwell. Dicha ley permite encontrar la magnitud de $\vec{E}$ por medio de una superficie gaussiana esférica o cilíndrica (no importa la forma del objeto, siempre se cumple). En dicha ley, el flujo neto de campo eléctrico en una superficie cerrada es $1/\epsilon_0$ veces la carga encerrada en la superficie gaussiana. Se expresa como:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

2. **En cada vértice de un cubo de lado $L$ se coloca una carga de magnitud $Q$. Un vértice se encuentra sobre el origen y las aristas están sobre los ejes rectangulares. Encuentre la fuerza neta en la carga ubicada en $\vec{r} = L\hat{i} + L\hat{j} + L\hat{k}$ en los casos siguientes:**

a) **Todas las cargas tienen el mismo signo.**

b) **El vecino más cercano de cada carga tiene signo opuesto.**

*Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 1.):*

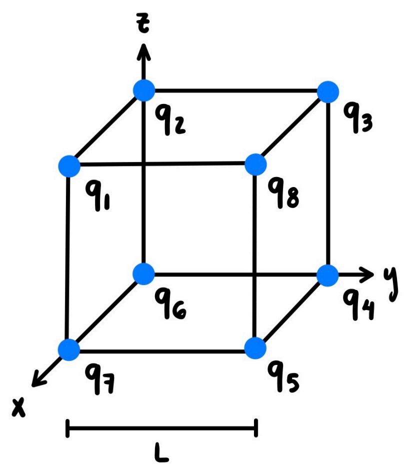


***Figura 1.*** *Cubo con cargas en los vértices.*

*Primero, definamos los vectores $\vec{r}_i$ correspondientes a las cargas $q_i$ respectivamente:*

$$\vec{r}_1 = (L, 0, L)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0, L)$$

$$\vec{r}_3 = (0, L, L)$$

$$\vec{r}_4 = (0, L, 0)$$

$$\vec{r}_5 = (L, L, 0)$$

$$\vec{r}_6 = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_7 = (L, 0, 0)$$

$$\vec{r}_8 = (L, L, L)$$

*Para determinar explícitamente las fuerzas involucradas, utilizaremos la ley de Coulomb:*

$$\vec{F}_{ij} = \frac{kq_iq_j}{r_{ji}^3}\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)$$

*Donde $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza causada por $q_j$ sobre $q_i$. Como se solicita calcular la fuerza neta sobre $\vec{r}_8$, debemos calcular las interacciones debidas a $q_8$. Para el inciso a) consideremos que $q_i = Q$. Para determinar $\vec{F}_{18}$:*

$$\vec{r}_{81} = \vec{r}_8 - \vec{r}_1 = (L, L, L) - (L, 0, L) = (0, L, 0)$$

$$r_{81} = \sqrt{L^2} = L$$

$$\vec{F}_{18} = \frac{kq_1q_8}{r_{81}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_1\right) = \frac{kQQ}{L^3}(0, L, 0) = \frac{kQ^2}{L^3}(0, L, 0)$$

*Para determinar $\vec{F}_{28}$:*

$$\vec{r}_{82} = \vec{r}_8 - \vec{r}_2 = (L, L, L) - (0, 0, L) = (L, L, 0)$$

$$r_{82} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2}$$

$$\vec{F}_{28} = \frac{kq_2q_8}{r_{82}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_2\right) = \frac{kQQ}{\left(L\sqrt{2}\right)^3}(L, L, 0) = \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L, L, 0)$$

*Para determinar $\vec{F}_{38}$:*

$$\vec{r}_{83} = \vec{r}_8 - \vec{r}_3 = (L, L, L) - (0, L, L) = (L, 0, 0)$$

$$r_{83} = \sqrt{L^2} = L$$

$$\vec{F}_{38} = \frac{kq_3q_8}{r_{83}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_3\right) = \frac{kQQ}{L^3}(L, 0, 0) = \frac{kQ^2}{L^3}(L, 0, 0)$$

*Para determinar $\vec{F}_{48}$:*

$$\vec{r}_{84} = \vec{r}_8 - \vec{r}_4 = (L, L, L) - (0, L, 0) = (L, 0, L)$$

$$r_{84} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2}$$

$$\vec{F}_{48} = \frac{kq_4q_8}{r_{84}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_4\right) = \frac{kQQ}{\left(L\sqrt{2}\right)^3}(L, 0, L) = \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L, 0, L)$$

*Para determinar $\vec{F}_{58}$:*

$$\vec{r}_{85} = \vec{r}_8 - \vec{r}_5 = (L, L, L) - (L, L, 0) = (0, 0, L)$$

$$r_{85} = \sqrt{L^2} = L$$

$$\vec{F}_{58} = \frac{kq_5q_8}{r_{85}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_5\right) = \frac{kQQ}{L^3}(0, 0, L) = \frac{kQ^2}{L^3}(0, 0, L)$$

*Para determinar $\vec{F}_{68}$:*

$$\vec{r}_{86} = \vec{r}_8 - \vec{r}_6 = (L, L, L) - (0, 0, 0) = (L, L, L)$$

$$r_{86} = \sqrt{L^2 + L^2 + L^2} = L\sqrt{3}$$

$$\vec{F}_{68} = \frac{kq_6q_8}{r_{86}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_6\right) = \frac{kQQ}{\left(L\sqrt{3}\right)^3}(L, L, L) = \frac{kQ^2}{3L^3\sqrt{3}}(L, L, L)$$

*Para determinar* $\vec{F}_{78}$*:*

$$\vec{r}_{87} = \vec{r}_8 - \vec{r}_7 = (L, L, L) - (L, 0, 0) = (0, L, L)$$

$$r_{87} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2}$$

$$\vec{F}_{78} = \frac{kq_7q_8}{r_{87}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_7\right) = \frac{kQQ}{\left(L\sqrt{2}\right)^3}(0, L, L) = \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(0, L, L)$$

*Sumando estas interacciones:*

$$\vec{F}_{28} + \vec{F}_{48} + \vec{F}_{78} = \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L, L, 0) + \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L, 0, L) + \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(0, L, L) = \frac{2kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L, L, L)$$

$$\vec{F}_{18} + \vec{F}_{38} + \vec{F}_{58} = \frac{kQ^2}{L^3}(0, L, 0) + \frac{kQ^2}{L^3}(L, 0, 0) + \frac{kQ^2}{L^3}(0, 0, L) = \frac{kQ^2}{L^3}(L, L, L)$$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{18} + \vec{F}_{28} + \vec{F}_{38} + \vec{F}_{48} + \vec{F}_{58} + \vec{F}_{68} + \vec{F}_{78}$$

$$\vec{F}_T = \left(\vec{F}_{28} + \vec{F}_{48} + \vec{F}_{78}\right) + \left(\vec{F}_{18} + \vec{F}_{38} + \vec{F}_{58}\right) + \vec{F}_{68}$$

$$\vec{F}_T = \frac{2kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L, L, L) + \frac{kQ^2}{L^3}(L, L, L) + \frac{kQ^2}{3L^3\sqrt{3}}(L, L, L)$$

*Simplificando:*

$$\vec{F}_T = \frac{kQ^2}{L^2\sqrt{2}}(1, 1, 1) + \frac{kQ^2}{L^2}(1, 1, 1) + \frac{kQ^2}{3L^2\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{kQ^2}{L^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)(1, 1, 1)$$

*Para el inciso b) debemos considerar que las cargas se verán alternadas en la Figura 1., es decir,* $q_1 = q_3 = q_5 = q_6 = -Q$ *y* $q_2 = q_4 = q_7 = q_8 = Q$*. Por lo que solo se verán afectadas las siguientes interacciones:*

$$\vec{F}_{18} = \frac{kq_1q_8}{r_{81}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_1\right) = \frac{k(-Q)Q}{L^3}(0, L, 0) = -\frac{kQ^2}{L^3}(0, L, 0)$$

$$\vec{F}_{38} = \frac{kq_3q_8}{r_{83}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_3\right) = \frac{k(-Q)Q}{L^3}(L,0,0) = -\frac{kQ^2}{L^3}(L,0,0)$$

$$\vec{F}_{58} = \frac{kq_5q_8}{r_{85}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_5\right) = \frac{k(-Q)Q}{L^3}(0,0,L) = -\frac{kQ^2}{L^3}(0,0,L)$$

$$\vec{F}_{68} = \frac{kq_6q_8}{r_{86}^3}\left(\vec{r}_8 - \vec{r}_6\right) = \frac{k(-Q)Q}{\left(L\sqrt{3}\right)^3}(L,L,L) = -\frac{kQ^2}{3L^3\sqrt{3}}(L,L,L)$$

*Sumando estas interacciones:*

$$\vec{F}_{28} + \vec{F}_{48} + \vec{F}_{78} = \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L,L,0) + \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L,0,L) + \frac{kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(0,L,L) = \frac{2kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L,L,L)$$

$$\vec{F}_{18} + \vec{F}_{38} + \vec{F}_{58} = -\frac{kQ^2}{L^3}(0,L,0) - \frac{kQ^2}{L^3}(L,0,0) - \frac{kQ^2}{L^3}(0,0,L) = -\frac{kQ^2}{L^3}(L,L,L)$$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{18} + \vec{F}_{28} + \vec{F}_{38} + \vec{F}_{48} + \vec{F}_{58} + \vec{F}_{68} + \vec{F}_{78}$$

$$\vec{F}_T = \left(\vec{F}_{28} + \vec{F}_{48} + \vec{F}_{78}\right) + \left(\vec{F}_{18} + \vec{F}_{38} + \vec{F}_{58}\right) + \vec{F}_{68}$$

$$\vec{F}_T = \frac{2kQ^2}{2L^3\sqrt{2}}(L,L,L) - \frac{kQ^2}{L^3}(L,L,L) - \frac{kQ^2}{3L^3\sqrt{3}}(L,L,L)$$

*Simplificando:*

$$\vec{F}_T = \frac{kQ^2}{L^2\sqrt{2}}(1,1,1) - \frac{kQ^2}{L^2}(1,1,1) - \frac{kQ^2}{3L^2\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{kQ^2}{L^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)(1,1,1)$$

3. **Un disco no conductor de radio $R$ tiene una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_o r$. ¿Cuál es la intensidad del campo sobre el eje central del disco, a una distancia $z$ de su centro?**

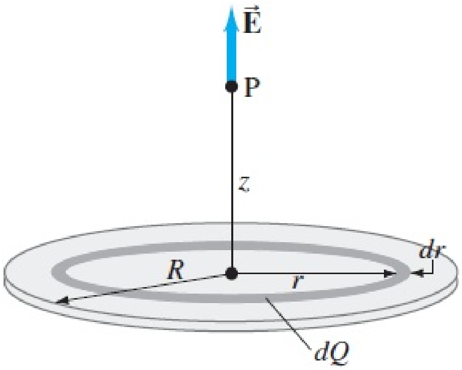


***Figura 2.*** *Disco de radio $R$ con densidad de carga $\sigma = \sigma_o r$.*

*Del dibujo anterior podemos definir los siguientes vectores:*

$$\vec{r}_p = (0, 0, z)$$

$$\vec{r}_q = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

*Para determinar el campo eléctrico podemos usar la siguiente expresión:*

$$\vec{E} = \int_A \frac{k\sigma dA}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_q\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_q)$$

*Para este problema:*

$$dA = rdrd\theta$$

$$\vec{r}_p - \vec{r}_q = (0, 0, z) - (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_q\| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + z^2} = \sqrt{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

*Reemplazando:*

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{k(\sigma_0 r) rdrd\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}}(-r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$

$$\vec{E} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma_0 r^2 dr d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} (-r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$

*Separando las componentes del campo eléctrico:*

$$E_x = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma_0 r^2 dr d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} (-r\cos\theta) = -\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma_0 r^3 \cos\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr d\theta$$

$$E_y = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma_0 r^2 dr d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} (-r\sin\theta) = -\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma_0 r^3 \sin\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr d\theta$$

$$E_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{k\sigma_0 r^2 dr d\theta}{(r^2+z^2)^{3/2}} (z) = k\sigma_0 z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

*Dado que las funciones* $\sin\theta$ *y* $\cos\theta$ *son periódicas:*

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin\theta) d\theta = 0$$

*Por ende:*

$$E_x = -\int_0^R \frac{k\sigma_0 r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta) d\theta = 0$$

$$E_y = -\int_0^R \frac{k\sigma_0 r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr \int_0^{2\pi} (\sin\theta) d\theta = 0$$

*Calculando la componente* $E_z$*:*

$$E_z = k\sigma_0 z \left[\theta\right]_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = k\sigma_0 z (2\pi - 0) \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi k\sigma_0 z \int_0^R \frac{r^2 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

*Consideremos la siguiente sustitución:*

$$r = z\tan\alpha$$

$$dr = z\sec^2\alpha d\alpha$$

*Entonces:*

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^2\tan^2\alpha}{(z^2\tan^2\alpha + z^2)^{3/2}} z\sec^2\alpha d\alpha = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^3\tan^2\alpha\sec^2\alpha}{\left[z^2\left(\tan^2\alpha+1\right)\right]^{3/2}} d\alpha$$

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^3 \tan^2\alpha \sec^2\alpha}{(z^2\sec^2\alpha)^{3/2}} d\alpha = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^3 \tan^2\alpha \sec^2\alpha}{z^3\sec^3\alpha} d\alpha$$

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tan^2\alpha}{\sec\alpha} d\alpha = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\tan^2\alpha \cos\alpha\right) d\alpha$$

*Utilizando la identidad pitagórica* $\tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$*:*

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\left(\sec^2\alpha - 1\right)\cos\alpha\right] d\alpha = 2\pi k\sigma_0 z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\sec\alpha - \cos\alpha)\, d\alpha$$

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \left[\ln|\tan\alpha + \sec\alpha| - \sin\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

*Deshaciendo la sustitución:*

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \left[\ln\left|\frac{r}{z} + \frac{\sqrt{z^2+r^2}}{z}\right| - \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_0^R$$

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \left[\left(\ln\left|\frac{R}{z} + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\right| - \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) - \left(\ln\left|\frac{0}{z} + \frac{\sqrt{z^2+0^2}}{z}\right| - \frac{0}{\sqrt{z^2+0^2}}\right)\right]$$

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \left[\left(\ln\left|\frac{R}{z} + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\right| - \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) - (\ln|1|)\right]$$

*Simplificando:*

$$E_z = 2\pi k\sigma_0 z \left(\ln\left|\frac{R}{z} + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\right| - \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

*Como tal, su expresión vectorial es:*

$$\vec{E} = 2\pi k\sigma_0 z \left(\ln\left|\frac{R}{z} + \frac{\sqrt{z^2+R^2}}{z}\right| - \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{k}$$

4. **Se dispara un electrón a un ángulo de $\theta = 30°$ sobre la horizontal a la mitad entre dos placas paralelas de longitud $l$ y separación $d$ y carga $\sigma$. Encuentre los valores mínimo y máximo de rapidez inicial $v_0$ para que el electrón no choque con ninguna de las dos placas.**

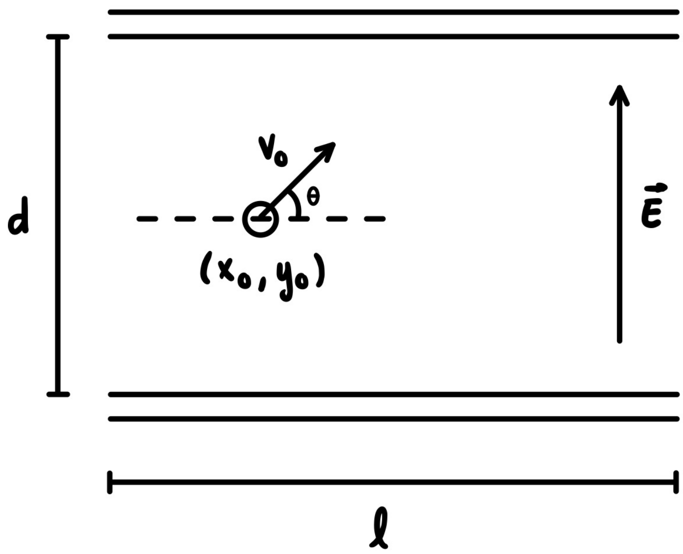


***Figura 3.*** *Electrón disparado entre placas paralelas.*

*Debido a la ambigüedad del problema, inicialmente consideraremos que el punto de lanzamiento del electrón es en la coordenadas $(x_0, y_0)$. Debido al campo eléctrico entre las placas, el movimiento será parabólico, por lo que:*

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)t$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

*Utilizando la segunda ley de Newton en el eje y:*

$$F_y = m_e a_y = eE$$

$$a_y = \frac{eE}{m_e}$$

*Donde $e$ es la carga del electrón, la cual es negativa. Reemplazando:*

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)t + \frac{eE}{2m_e}t^2$$

*Primero, buscamos el tiempo cuando la partícula alcanza la coordenada $(l, 0)$:*

$$l = x_0 + (v_0 \cos\theta)t - min$$

$$0 = y_0 + (v_0 \sin\theta)t_{min} + \frac{eE}{2m_e}t_{min}^2$$

*Despejando $t$:*

$$t_{min} = \frac{l - x_0}{v_0 \cos\theta}$$

$$0 = y_0 + (v_0 \sin\theta)\left(\frac{l - x_0}{v_0 \cos\theta}\right) + \frac{eE}{2m_e}\left(\frac{l - x_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

$$0 = y_0 + (\tan\theta)(l - x_0) + \frac{eE(l - x_0)^2}{2m_e v_0^2 \cos^2\theta}$$

*Despejando $v_0$:*

$$-\frac{eE(l - x_0)^2}{2m_e v_0^2 \cos^2\theta} = y_0 + (\tan\theta)(l - x_0)$$

$$-\frac{eE(l - x_0)^2}{2m_e[y_0 + (\tan\theta)(l - x_0)]\cos^2\theta} = v_0^2$$

*Reemplazando $\theta = 30°$, considerando que el campo eléctrico entre placas paralelas es $E = \sigma/\epsilon_0$:*

$$v_0^2 = -\frac{e\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)(l - x_0)^2}{2m_e[y_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(l - x_0)]\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{e\sigma(l - x_0)^2}{m_e\epsilon_0[y_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(l - x_0)]\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$v_0^2 = -\frac{2e\sigma(l - x_0)^2}{3m_e\epsilon_0[y_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(l - x_0)]} = -\frac{2e\sigma(l - x_0)^2}{m_e\epsilon_0[3y_0 + \sqrt{3}(l - x_0)]}$$

*Suponiendo que el problema se refiere a que el electrón es disparado desde la coordenadas $(0, d/2)$:*

$$v_0^2 = -\frac{2e\sigma(l)^2}{m_e\epsilon_0[3\left(\frac{d}{2}\right) + \sqrt{3}(l)]} = -\frac{4e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d + 2l\sqrt{3})}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{4e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d + 2l\sqrt{3})}}$$

*Suponiendo que el problema se refiere a que el electrón es disparado desde la coordenadas $(l/2, d/2)$:*

$$v_0^2 = -\frac{2e\sigma\left(l - \frac{l}{2}\right)^2}{m_e\epsilon_0[3\left(\frac{d}{2}\right) + \sqrt{3}\left(l - \frac{l}{2}\right)]} = -\frac{2e\sigma\left(\frac{l}{2}\right)^2}{m_e\epsilon_0[3\left(\frac{d}{2}\right) + \sqrt{3}\left(\frac{l}{2}\right)]} = -\frac{4e\sigma\left(\frac{l^2}{4}\right)}{m_e\epsilon_0(3d + l\sqrt{3})}$$

$$v_0^2 = -\frac{e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d + l\sqrt{3})}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{e\sigma l^2}{m_e\epsilon_0(3d + l\sqrt{3})}}$$

*Esta es la velocidad mínima para el electrón. Ahora, debemos buscar el tiempo cuando la partícula alcance su altura máxima, ya que, si $y_{max} = d$ el electrón chocará con la placa de arriba. Para ello:*

$$v_y = v_0 \sin\theta + \frac{eE}{m_e}t$$

*En su altura máxima, $v_y = 0$, por lo que:*

$$0 = v_0 \sin\theta + \frac{eE}{m_e}t_{max}$$

$$t_{max} = -\frac{m_e v_0 \sin\theta}{eE}$$

*Reemplazando $t_{max}$ en $y$:*

$$y = y_0 + (v_0 \sin\theta)\left(-\frac{m_e v_0 \sin\theta}{eE}\right) + \frac{eE}{2m_e}\left(-\frac{m_e v_0 \sin\theta}{eE}\right)^2$$

$$y = y_0 - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{eE} + \frac{eE}{2m_e}\left(\frac{m_e^2 v_0^2 \sin^2\theta}{e^2E^2}\right) = y_0 - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{eE} + \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

$$y = y_0 - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

*Notemos que en ambos casos planteados por la ambigüedad, $y_0 = d/2$. También debemos imponer que $y = d$ sea la distancia máxima que pueda tomar el electrón, ya que, si $y > d$ la partícula colisionará con la placa de arriba. Por ende:*

$$d = \frac{d}{2} - \frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

$$\frac{d}{2} = -\frac{m_e v_0^2 \sin^2\theta}{2eE}$$

$$v_0^2 = -\frac{eEd}{m_e \sin^2\theta}$$

*Reemplazando* $\theta = 30°$, *considerando que el campo eléctrico entre placas paralelas es* $E = \sigma/\epsilon_0$*:*

$$v_0^2 = -\frac{e\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)d}{m_e\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{e\sigma d}{m_e\epsilon_0\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{4e\sigma d}{m_e\epsilon_0}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{4e\sigma d}{m_e\epsilon_0}}$$