Primer Examen Parcial
Física General III

Enero 2023

1. **Describa y explique ampliamente los siguientes conceptos:**

   a) **Carga eléctrica:** Es una propiedad intrínseca de la materia. Por convención se clasifica en carga positiva o negativa. También existe la carga neutra, aunque se refiere a que cargas positivas y negativas se encuentran en las misma cantidad. La carga está cuantizada, y cada electrón tiene carga de $-1.6 \times 10^{-19}\,C$. Además, las cargas adicionales son múltiplos de esta carga fundamental. Su unidad en el sistema internacional es el Coulomb (C). En presencia de otra carga presenta fuerzas de atracción o repulsión, y la carga en un sistema cerrado se transfiere sin pérdida, es decir, es constante.

   b) **Ley de Coulomb:** Dicha ley toma como argumento las interacciones de atracción o repulsión que presentan dos cargas cuando se colocan con una cierta distancia de separación. La fuerza de atracción se da cuando una carga es positiva y otra negativa, mientras que la fuerza de repulsión cuando ambas cargas tienen el mismo signo. La dirección de la fuerza se encuentra en la linea de acción que une ambas cargas. Esta ley propone que F es inversamente proporcional a r^2 y directamente proporcional a $|q_1 q_2|$. En general, se expresa como:

   $$\vec{F} = \frac{k\,|q_1 q_2|}{r^2}\hat{r}$$

   Donde $\hat{r}$ apunta en dirección saliente de la linea de acción que une ambas cargas.

   c) **Campo eléctrico:** Es un campo vectorial (donde a cada punto del espacio se le asocia un vector) en el espacio que se genera por la presencia de una carga eléctrica. Rodea a la carga que lo genera, y es el encargado de la interaccionar (a través de la ley de Coulomb) con otra carga que se encuentre en la vecindad del campo. La intensidad de este campo depende de la carga eléctrica, y para dar cuenta de ello es necesario una carga de prueba q_0. Si el campo $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $\vec{F}$, y su unidad en el SI es el N/C. En un punto dado del espacio circundante, $\vec{E}$ se define como la fuerza por unidad de carga en cada punto. Se expresa como:

   $$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

   Donde $\hat{r}$ indica la dirección de $\vec{E}$ en el punto que se desea determinar.

d) **Lineas de campo:** Para dibujarlas se requiere de una carga de prueba q_0, y que dicha carga se coloque en distintos puntos para visualizar los vectores de $\vec{F}$ y $\vec{E}$ en el espacio. Posteriormente se unen dichos vectores en diferentes lineas, las cuales son lineas de campo. Dichas lineas:

- Salen de las cargas positiva y entran en las negativas.
- La intensidad del campo es proporcional al número de lineas.
- La magnitud del campo es proporcional a la densidad del número de lineas de campo por área.
- Son lineas continuas y nunca se cruzan.
- Los vectores de $\vec{F}$ ó $\vec{E}$ son tangentes a dichas lineas.

e) **Flujo eléctrico:** Se define como el número de lineas de campo eléctrico que fluyen por un área determinada. Matemáticamente, el flujo de campo eléctrico se expresa como:

$$\phi_E = \left\|\vec{E}\right\| \left\|\vec{A}\right\| \cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} A$$

Donde $\hat{n}$ es el vector normal al área A. Con ello, θ es el ángulo entre los vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$. Si la superficie no es plana y el campo eléctrico es uniforme:

$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Donde el vector $d\vec{A}$ siempre apunta hacia afuera de la superficie. Las lineas de flujo que entran a la superficie generan un flujo negativo, mientras que las lineas de campo que salen de la superficie resultan en un flujo positivo.

f) **Ley de Gauss:** Es una de las ecuaciones de Maxwell. Dicha ley permite encontrar la magnitud de $\vec{E}$ por medio de una superficie gaussiana esférica o cilíndrica (no importa la forma del objeto, siempre se cumple). En dicha ley, el flujo neto de campo eléctrico en una superficie cerrada es $1/\epsilon_0$ veces la carga encerrada en la superficie gaussiana. Se expresa como:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

g) **Potencial Eléctrico:** Es un campo escalar, el cual le asocia a cada punto del espacio una magnitud. La cual, representa el trabajo por unidad de carga que realiza un agente externo para desplazar una carga unitaria de prueba del punto A al punto B. En el SI su unidad es el volt (V). De acuerdo a su definición, solo tiene sentido hablar de diferencias de potencial eléctrico, es decir, $\Delta V = V_B - V_A$.

2. **Tres cargas puntuales q, $-2q$ y q, se encuentran localizadas sobre el eje x con coordenadas $(-a, 0)$, $(0, 0)$ y $(a, 0)$, respectivamente. Determine el campo eléctrico en un punto P sobre el eje y cuando (a) $y > a$ y en el caso (b) $y < a$.**

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 2.):

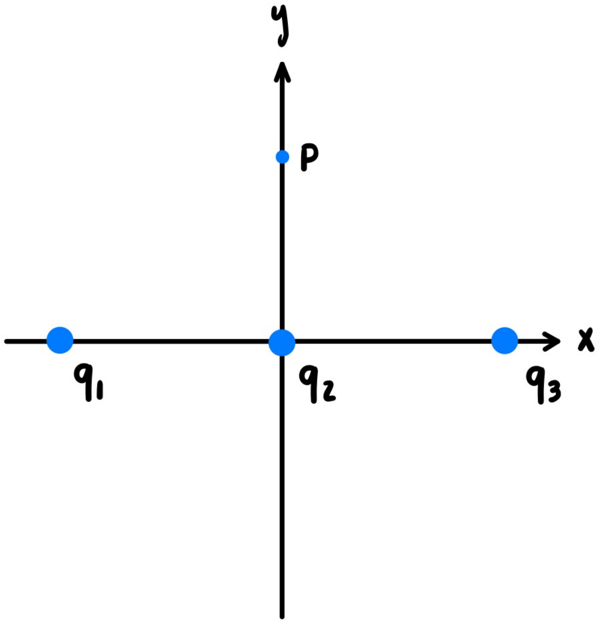

Figura 1. *Arreglo de cargas del problema 3.*

De la Figura 2. definimos $q_1 = q$, $q_2 = -2q$ y $q_3 = q$. También definimos los siguientes vectores:

$$\vec{r}_1 = (-a, 0)$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0)$$

$$\vec{r}_a = (a, 0)$$

$$\vec{r}_p = (0, y)$$

Para determinar el campo eléctrico de cada carga q_i al punto P utilizaremos la siguiente expresión:

$$\vec{E}_i = \frac{kq_i}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_i\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_i)$$

Para determinar $\vec{E}_1$:

$$\vec{r}_p - \vec{r}_1 = (0, y) - (-a, 0) = (a, y)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_1\| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_1) = \frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}(a, y)$$

Para determinar $\vec{E}_2$:

$$\vec{r}_p - \vec{r}_2 = (0, y) - (0, 0) = (0, y)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_2\| = \sqrt{y^2} = y$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_2) = \frac{k(-2q)}{y^3}(0, y) = -\frac{2kq}{y^2}(0, 1)$$

Para determinar $\vec{E}_3$:

$$\vec{r}_p - \vec{r}_3 = (0, y) - (a, 0) = (-a, y)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_3\| = \sqrt{a^2 + y^2}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{kq_3}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_3\|^3} (\vec{r}_p - \vec{r}_3) = \frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}(-a, y)$$

Para encontrar el campo eléctrico total sobre el punto P:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E}_T = \frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}(a, y) - \frac{2kq}{y^2}(0, 1) + \frac{kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}(-a, y)$$

$$\vec{E}_T = \frac{2kq}{(a^2 + y^2)^{3/2}}(0, y) - \frac{2kq}{y^2}(0, 1) = 2kq \left[\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \right] \hat{j}$$

Para el inciso (a) se cumple que $a/y < 1$. Entonces, podemos realizar la siguiente expansión en serie:

$$\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2 - \cdots$$

Entonces:

$$\vec{E}_T = 2kq\left[\frac{y}{y^3\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j} = 2kq\left[\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2kq}{y^2}\left[\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{-3/2} - 1\right]\hat{j} = \frac{2kq}{y^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2 - \cdots - 1\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2kq}{y^2}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^2 - \cdots\right]\hat{j}$$

Dado que $a/y < 1$, podemos cortar la suma al primer término:

$$\vec{E}_T \approx \frac{2kq}{y^2}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)\right]\hat{j} = -3kq\left(\frac{a^2}{y^4}\right)\hat{j}$$

Para el inciso (b) se cumple que $y/a < 1$. Entonces, podemos realizar la siguiente expansión en serie:

$$\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{y^2}{a^2}\right)^2 - \cdots$$

Entonces:

$$\vec{E}_T = 2kq\left[\frac{y}{a^3\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j} = 2kq\left[\frac{y}{a^3}\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{-3/2} - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = 2kq\left\{\frac{y}{a^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{y^2}{a^2}\right)^2 - \cdots\right] - \frac{1}{y^2}\right\}\hat{j}$$

$$\vec{E}_T = 2kq\left[\frac{y}{a^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{y^3}{a^5}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{y^5}{a^7}\right) - \cdots - \frac{1}{y^2}\right]\hat{j}$$

Dado que $y/a < 1$, podemos cortar la suma al primer término:

$$\vec{E}_T \approx 2kq\left(\frac{y}{a^3} - \frac{1}{y^2}\right)\hat{j} = 2kqy\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{y^3}\right)\hat{j}$$

3. **Un cascarón esférico de radio R rodea una carga puntual Q localizada en su centro.**

   a) **Demuestre que el flujo de campo eléctrico a través de una tapa circular de medio ángulo θ esta dado por:**

   $$\phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1 - \cos\theta)$$

   b) **Si sobre el cascarón existe una densidad de carga superficial σ uniformemente distribuida, determine el campo eléctrico dentro y fuera de dicho cascarón.**

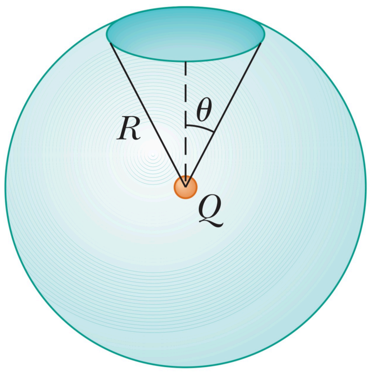

Figura 2. *Cascarón esférico de radio R.*

Para el inciso a) debemos usar la definición de flujo eléctrico:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

El campo eléctrico que genera una carga puntual Q es el siguiente

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{r}$$

Además, de cálculo multivariable, sabemos que:

$$d\vec{A} = (R\sin\theta)\vec{r}d\theta d\phi$$

Donde $\vec{r} = (x, y, z)$. Sustituyendo:

$$\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} \right) \cdot \left[(R \sin\theta) \vec{r} \right] d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left\| \vec{r} \right\|^2 \sin\theta \right) d\theta d\phi$$

Pero $\left\| \vec{r} \right\|^2 = R^2$, por lo que:

$$\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 \sin\theta \right) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \right) d\theta d\phi$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} (\sin\theta) \, d\theta d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} (\sin\theta) \, d\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\phi \right]_0^{2\pi} \left[\cos\theta \right]_{\theta}^{0}$$

Evaluando en los limites de integración:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (2\pi - 0) \left[\cos(0) - \cos\theta \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (2\pi) (1 - \cos\theta) = \frac{Q}{2\epsilon_0} (1 - \cos\theta)$$

Para el inciso b) debemos usar la ley de Gauss, pero ahora consideraremos todo el cascarón esférico. Como el problema establece que σ es constante:

$$Q_{cas} = \int_S \sigma dA = \sigma \int_S dA$$

Donde Q_{cas} es la carga del cascarón esférico. Dado que $d\vec{A} = (R \sin\theta) \vec{r} d\theta d\phi$:

$$dA = \left\| d\vec{A} \right\| = \sqrt{\left(R^2 \sin^2\theta \right) \left(R^2 \right) \left(d\theta d\phi \right)^2} = \left(R^2 \sin\theta \right) d\theta d\phi$$

Entonces:

$$Q_{cas} = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(R^2 \sin\theta \right) d\theta d\phi = \sigma R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta) \, d\theta = \sigma R^2 \left[\phi \right]_0^{2\pi} \left[\cos\theta \right]_{\pi}^{0}$$

Evaluando en los limites de integración:

$$Q_{cas} = \sigma R^2 (2\pi - 0) \left[\cos(0) - \cos(\pi) \right] = \sigma R^2 (2\pi) \left[1 - (-1) \right] = \sigma 4\pi R^2$$

Por la simetría esférica, $\vec{E}$ debe ser radial, lo cual implica que:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E dA = E \int_S dA$$

Para $r < R$, la carga encerrada debe ser Q. Por lo que:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(r^2\sin\theta\right)d\theta d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Notemos que la integral doble anterior es prácticamente la misma que resolvimos para determinar Q_{enc}:

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Por otro lado, Para $r > R$, la carga encerrada debe ser:

$$Q_{enc} = Q + Q_{cas} = Q + \sigma 4\pi R^2$$

Entonces:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q + \sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q + \sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Como tal, la respuesta a este problema es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r},\ \ r < R$$

$$\vec{E} = \frac{Q + \sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r},\ \ r > R$$

4. **Una esfera de radio R tiene una distribución de carga esféricamente simétrica la cual esta dada por la ecuación $\rho = a/r$, donde a es una constante cualquiera.**

   a) **Determine el campo eléctrico que origina dicha distribución para $r > R$.**

   b) **Para $r < R$.**

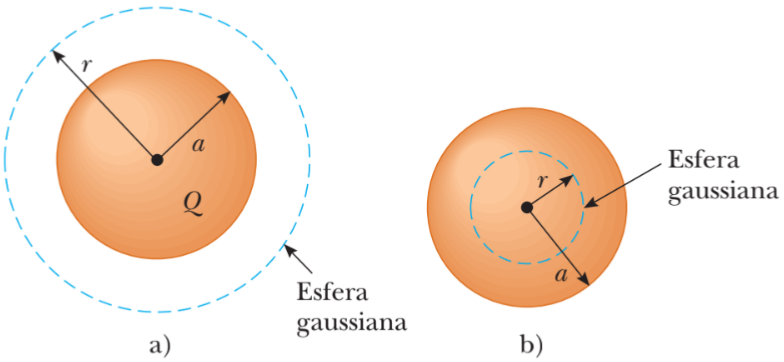

Figura 3. *Superficies gaussianas para la esfera de radio R.*

Para resolver este problema usaremos la ley de Gauss, basándonos en las superficies gaussianas mostradas en la Figura 3. considerando que el radio de la esfera no es a, sino R como dice el problema inicialmente. Por la simetría del problema, el campo eléctrico debe ser radial. Además, dA también es radial, por lo que:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E \int_S dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Como el área debe ser el de la esfera gaussiana de radio r:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Para determinar Q_{enc} en el inciso a):

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \left(\frac{a}{r}\right) \left(r^2 \sin\theta\right) dr d\theta d\phi$$

$$Q_{enc} = a \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta)\, d\theta \int_0^{R} (r)\, dr = a\, [\phi]_0^{2\pi} \, [\cos\theta]_\pi^0 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R$$

Evaluando:

$$Q_{enc} = a\,(2\pi - 0)\,[\cos(0) - \cos(\pi)] \left(\frac{R^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = a(2\pi)\,[1 - (-1)] \left(\frac{R^2}{2}\right) = 2\pi a R^2$$

Reemplazando:

$$E(4\pi r^2) = \frac{2\pi a R^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2\pi a R^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 2\pi k a \frac{R^2}{r^2}$$

Para determinar Q_{enc} en el inciso b):

$$Q_{enc} = \int_V \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \left(\frac{a}{r}\right) \left(r^2 \sin\theta\right) dr d\theta d\phi$$

$$Q_{enc} = a \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (\sin\theta)\, d\theta \int_0^{r} (r)\, dr = a\, [\phi]_0^{2\pi} \, [\cos\theta]_\pi^0 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r$$

Evaluando:

$$Q_{enc} = a\,(2\pi - 0)\,[\cos(0) - \cos(\pi)] \left(\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = a(2\pi)\,[1 - (-1)] \left(\frac{r^2}{2}\right) = 2\pi a r^2$$

Reemplazando:

$$E(4\pi r^2) = \frac{2\pi a r^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2\pi a r^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} = 2\pi k a$$

Como tal, la respuesta a este problema es:

$$\vec{E} = 2\pi k a \frac{R^2}{r^2}\hat{r}, \;\; r > R$$

$$\vec{E} = (2\pi k a)\hat{r}, \;\; 0 < r \leq R$$