Segundo Examen Parcial
Física General III

Agosto 2023

1. **Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial no uniforme $\sigma = Cr$, donde C es una constante y r es medida desde el centro del disco. Encuentre por integración directa el potencial en un punto axial P a una distancia z del disco.**

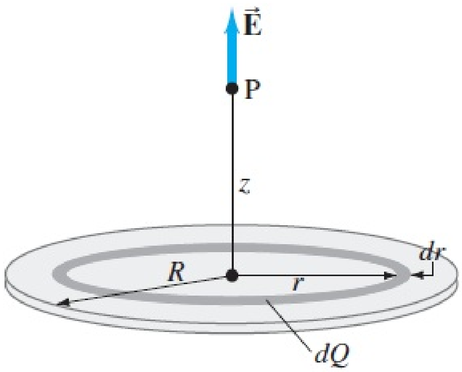

Figura 1. *Disco de radio R con densidad de carga $\sigma = Cr$.*

Del dibujo anterior podemos definir los siguientes vectores:

$$\vec{r}_p = (0, 0, z)$$

$$\vec{r}_q = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

Para determinar el campo eléctrico podemos usar la siguiente expresión:

$$\Delta V = \int_A \frac{k\sigma dA}{\|\vec{r}_p - \vec{r}_q\|}$$

Para este problema:

$$dA = r dr d\theta$$

$$\vec{r}_p - \vec{r}_q = (0,0,z) - (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, z)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}_q\| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + z^2} = \sqrt{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z^2} = \sqrt{r^2+z^2}$$

Reemplazando:

$$\Delta V = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{k(Cr)r dr d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{kCr^2 dr d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = kC\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Delta V = kC\left[\theta\right]_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = kC\left(2\pi - 0\right)\int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi kC\int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Consideremos la siguiente sustitución:

$$r = z\tan\alpha$$

$$dr = z\sec^2\alpha d\alpha$$

Entonces:

$$\Delta V = 2\pi kC\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^2\tan^2\alpha}{\sqrt{z^2\tan^2\alpha + z^2}} z\sec^2\alpha d\alpha = 2\pi kC\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^3\tan^2\alpha\sec^2\alpha}{\sqrt{z^2\left(\tan^2\alpha + 1\right)}} d\alpha$$

$$\Delta V = 2\pi kC\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^3\tan^2\alpha\sec^2\alpha}{\sqrt{z^2\sec^2\alpha}} d\alpha = 2\pi kC\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{z^3\tan^2\alpha\sec^2\alpha}{z\sec\alpha} d\alpha$$

$$\Delta V = 2\pi kC\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(z^2\tan^2\alpha\sec\alpha\right) d\alpha = 2\pi kCz^2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\tan^2\alpha\sec\alpha\right) d\alpha$$

Utilizando la identidad pitagórica $\tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$*:*

$$\Delta V = 2\pi kCz^2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\left(\sec^2\alpha - 1\right)\sec\alpha\right] d\alpha = 2\pi kCz^2\left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\sec^3\alpha\right) d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\sec\alpha\right) d\alpha\right]$$

Estas dos integrales se pueden resolver por partes. Pero buscando directamente en la tabla de integrales:

$$\int \left(\sec^3 \alpha\right) d\alpha = \frac{1}{2} \tan \alpha \sec \alpha + \frac{1}{2} \ln |\tan \alpha + \sec \alpha| + c_1$$

$$\int (\sec \alpha)\, d\alpha = \ln |\tan \alpha + \sec \alpha| + c_2$$

$$\int \left(\sec^3 \alpha\right) d\alpha - \int (\sec \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2} \tan \alpha \sec \alpha + \frac{1}{2} \ln |\tan \alpha + \sec \alpha| + c_1 - \ln |\tan \alpha + \sec \alpha| - c_2$$

$$\int \left(\sec^3 \alpha\right) d\alpha - \int (\sec \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2} \tan \alpha \sec \alpha - \frac{1}{2} \ln |\tan \alpha + \sec \alpha| + c_3$$

Reemplazando:

$$\Delta V = 2\pi k C z^2 \left[\frac{1}{2} \tan \alpha \sec \alpha - \frac{1}{2} \ln |\tan \alpha + \sec \alpha|\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

Deshaciendo la sustitución:

$$\Delta V = 2\pi k C z^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{z}\right) - \frac{1}{2} \ln \left|\frac{r}{z} + \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{z}\right|\right]_0^R$$

$$\Delta V = \pi k C z^2 \left[\left(\frac{r}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{z}\right) - \ln \left|\frac{r}{z} + \frac{\sqrt{r^2 + z^2}}{z}\right|\right]_0^R$$

Evaluando en los limites de integración:

$$\Delta V = \pi k C z^2 \left[\left(\frac{R}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{R^2 + z^2}}{z}\right) - \ln \left|\frac{R}{z} + \frac{\sqrt{R^2 + z^2}}{z}\right| - A_0\right]$$

$$A_0 = \left(\frac{0}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{0^2 + z^2}}{z}\right) - \ln \left|\frac{0}{z} + \frac{\sqrt{0^2 + z^2}}{z}\right| = -\ln \left|\frac{z}{z}\right| = -\ln |1| = 0$$

Reacomodando términos:

$$\Delta V = \pi k C z^2 \left(\frac{R\sqrt{R^2 + z^2}}{z^2} - \ln \left|\frac{R}{z} + \frac{\sqrt{R^2 + z^2}}{z}\right|\right)$$

2. **Un condensador de placa paralela con una separación entre las placas d tiene una capacitancia C_0 en ausencia de un dieléctrico. ¿Cuál es la capacitancia cuando se inserta una lámina de material dieléctrico de constante dieléctrica κ y espesor $d/3$ entre las placas?**

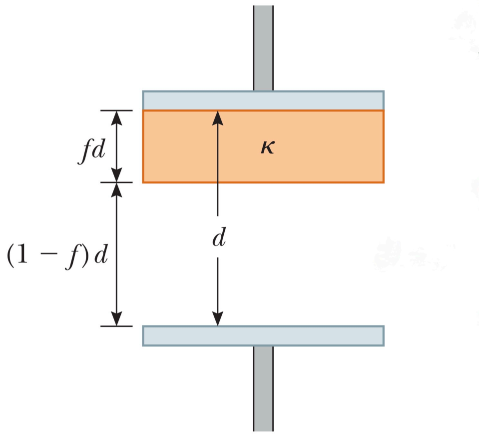

Figura 2. *Condensador de placa paralela.*

Para este problema en específico, $f = 1/3$. Consideraremos que las placas tiene una superficie con área A. Para determinar la capacitancia del material dieléctrico:

$$C_2 = \frac{A\epsilon_0}{\frac{1}{3}d}\kappa = \frac{3A\epsilon_0}{d}\kappa$$

Para determinar la capacitancia donde no está el material dieléctrico:

$$C_1 = \frac{A\epsilon_0}{\frac{2}{3}d}\kappa_0 = \frac{3A\epsilon_0}{2d}\kappa_0$$

Además, consideraremos que:

$$C_0 = \frac{A\epsilon_0}{d}\kappa_0$$

Dado que C_1 y C_2 se encuentran en serie, la capacitancia equivalente debe ser:

$$C_T = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\frac{3A\epsilon_0}{2d}\kappa_0} + \frac{1}{\frac{3A\epsilon_0}{d}\kappa}\right)^{-1} = \left[\left(\frac{1}{\frac{3A\epsilon_0}{D}}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\kappa_0} + \frac{1}{\kappa}\right)\right]^{-1}$$

$$C_T = \frac{3A\epsilon_0}{d}\left(\frac{2}{\kappa_0} + \frac{1}{\kappa}\right)^{-1} = \frac{3A\epsilon_0}{d}\left(\frac{2\kappa + \kappa_0}{\kappa\kappa_0}\right)^{-1} = \frac{3A\epsilon_0}{d}\left(\frac{\kappa\kappa_0}{2\kappa + \kappa_0}\right) = 3C_0\left(\frac{\kappa}{2\kappa + \kappa_0}\right)$$

Si $\kappa_0 = 1$*:*

$$C_T = 3C_0\left(\frac{\kappa}{2\kappa+1}\right)$$

Si $\kappa_0 \neq 1$*:*

$$\kappa_0 = \frac{C_0 d}{A\epsilon_0}$$

$$C_T = 3C_0\left(\frac{\kappa}{2\kappa+\frac{C_0 d}{A\epsilon_0}}\right) = 3C_0\left(\frac{\kappa}{\frac{2\kappa A\epsilon_0 + C_0 d}{A\epsilon_0}}\right) = 3C_0\left(\frac{\kappa A\epsilon_0}{2\kappa A\epsilon_0 + C_0 d}\right) = \frac{3C_0\kappa A\epsilon_0}{2\kappa A\epsilon_0 + C_0 d}$$

3. **Suponga que en la Figura 3. el interruptor ha estado cerrado durante un tiempo suficientemente largo para que el capacitor se cargue por completo. Determine a) la corriente en estado estacionario de cada resistor y b) la carga Q del capacitor. c) Ahora el interruptor se abre en $t = 0$. Escriba una ecuación para la corriente I_{R_2} a través de R_2 como una función del tiempo y d) determine el intervalo de tiempo necesario para que la carga del capacitor se reduzca a un quinto de su valor inicial.**

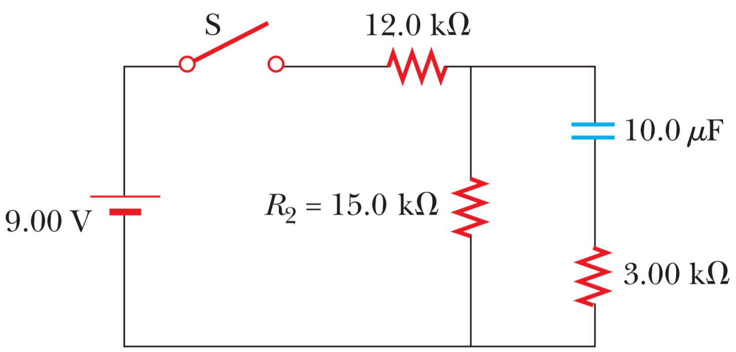

Figura 3. *Circuito del problema 3.*

Para responder el inciso a) debemos considerar que el interruptor S está conectado. En la malla derecha, donde se encuentra el capacitor, no habrá flujo de corriente ($I_C = I_{R_2} = 0$). Por otro lado, en la malla izquierda, podemos establecer un loop de corriente I_1 en sentido horario, para usar la segunda ley de Kirchhoff (2LK):

$$9\,V - (12\,k\Omega + 15\,k\Omega)I_1 = 0$$

$$9\,V - (27\,k\Omega)I_1 = 0$$

$$I_1 = I_{R_{12k\Omega}} = I_{R_{15k\Omega}} = \frac{9\,V}{27\,k\Omega} = \frac{1}{3}\,mA = 0.333\,mA$$

Para responder el inciso b):

$$Q = (10\,\mu F)(9\,V) = 90\,\mu C$$

Ahora, para responder el inciso c) debemos considerar que el interruptor S está desconectado. En la malla izquierda, no habrá flujo de corriente ($I = 0$). Por otro lado, en la malla derecha, podemos establecer un loop de corriente i_C en sentido horario. De esta manera:

$$\tau = (15\,k\Omega + 3\,k\Omega)(10\,\mu F) = 180\,ms$$

$$i_C = i_{R_2} = \frac{9\,V}{15\,k\Omega + 3\,k\Omega} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = (0.5\,mA)\exp\left(-\frac{t}{180\,ms}\right)$$

Para el inciso d) debemos usar la siguiente expresión:

$$Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{180\,ms}\right)$$

Como buscamos t tal que $Q = Q_0/5$:

$$\frac{1}{5}Q_0 = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{180\,ms}\right)$$

$$\frac{1}{5} = \exp\left(-\frac{t}{180\,ms}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{t}{180\,ms}$$

Despejando t:

$$t = (-180\,ms)\ln\left(\frac{1}{5}\right) = (180\,ms)\ln(5) = 289.698\,ms$$