Primer Examen Parcial
Geometría Analítica

Agosto 2022

1. **Demuestre que la distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por:**

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 1.):

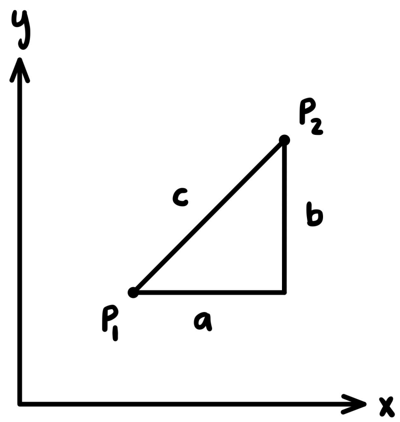

Figura 1. *Distancia entre dos puntos.*

Notemos que:

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

Como se forma un triángulo rectángulo, se puede usar el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Dado que $c = d$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. **Demuestre que un ángulo especificado θ formado por dos rectas está dado por la fórmula:**

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}, \;\; m_1 m_2 \neq -1$$

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 2.):

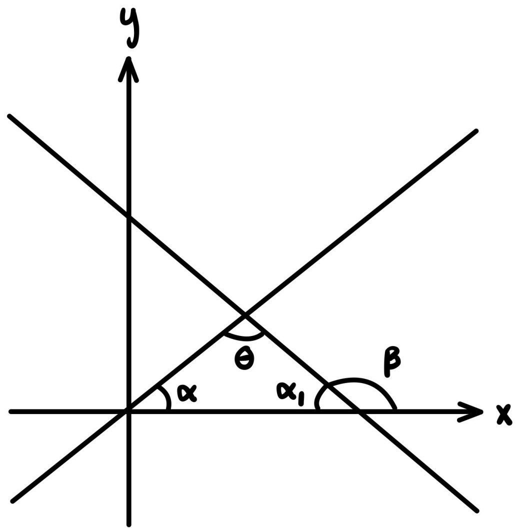

Figura 2. *Ángulo entre dos rectas.*

Para el tríángulo formado entre esas dos rectas y el eje x, se debe cumplir que:

$$\alpha + \alpha_1 + \theta = \pi$$

También, se debe cumplir que:

$$\alpha_1 + \beta = \pi$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$\alpha + \alpha_1 + \theta = \alpha_1 + \beta$$

$$\alpha + \theta = \beta$$

Despejando θ:

$$\theta = \beta - \alpha$$

$$\tan(\theta) = \tan(\beta - \alpha)$$

Usando la expresión para la tangente de una resta de ángulos:

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

Además, las pendientes de cada recta son las siguientes:

$$m_1 = \tan\alpha$$

$$m_2 = \tan\beta$$

Reemplazando:

$$\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Donde evidentemente:

$$1 + m_2 m_1 \neq 0$$

$$m_2 m_1 \neq -1$$

3. **Discuta la ecuación estudiando las intersecciones, simetría y extensión. Trace la gráfica correspondiente:**

$$x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Cuando $x = 0$:

$$-y^2 - 9 = 0$$

$$y^2 = -9$$

Dado que las soluciones a la ecuación anterior no son reales, no hay intersección alguna con el eje y. Cuando $y = 0$:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

Donde las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$. Por ende, las intersecciones en el eje x son:

$$A(-3, 0)$$

$$B(3, 0)$$

Si reemplazamos x por $-x$:

$$(-x)^2 - y^2 - 9 = x^2 - y^2 - 9 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Esto indica que la ecuación es simétrica al eje y. Si reemplazamos y por $-y$:

$$x^2 - (-y)^2 - 9 = x^2 - y^2 - 9 = 0$$

Esto indica que la ecuación es simétrica al eje x. Además, la estructura de la ecuación indica que el centro de esta hipérbola se encuentra en el origen, por lo que es simétrica al origen. Ahora, llevemos la ecuación a la siguiente forma:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Comparando con la ecuación general de una hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 3$$

$$b = 3$$

Por ende, el dominio y la imagen están dadas por:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

$$y \in (-\infty, \infty)$$

La gráfica de esta ecuación se puede observar en la Figura 3.:

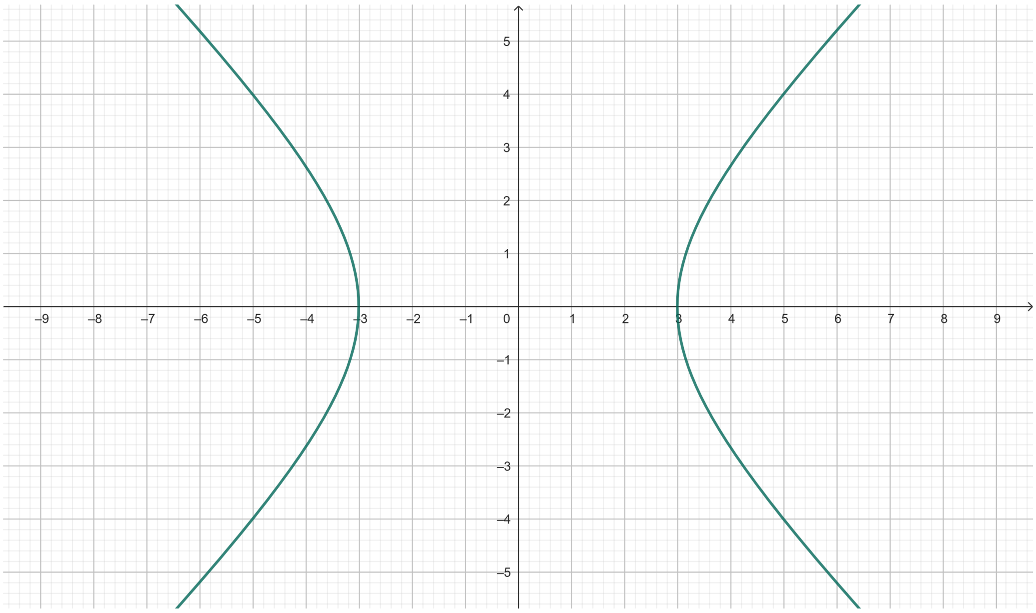

Figura 3. *Hipérbola del problema 3.*

4. **Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(3, 0)$ y $B(-3, 0)$ es siempre igual a 8.**

   Siendo $P(x, y)$ un punto cualquiera se debe cumplir que:

$$\left|\overline{PA}\right| + \left|\overline{PB}\right| = 8$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 8$$

   Elevando ambos lados al cuadrado:

$$\left[\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right]^2 = 64$$

$$(x-3)^2+y^2+2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}+(x+3)^2+y^2=64$$

$$x^2-6x+9+2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}+x^2+6x+9+2y^2=64$$

$$2x^2+2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}+18+2y^2=64$$

$$2\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}=46-2x^2-2y^2$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}=23-x^2-y^2$$

$$\left[(x-3)^2+y^2\right]\left[(x+3)^2+y^2\right]=\left(23-x^2-y^2\right)^2$$

$$(x^2-6x+9+y^2)(x^2+6x+9+y^2)=529+x^4+y^4+2(-23x^2-23y^2+x^2y^2)$$

$$(x^2+9+y^2)^2-(6x)^2=529+x^4+y^4-46x^2-46y^2+2x^2y^2$$

$$x^4+81+y^4+2x^2y^2+18x^2+18y^2-36x^2=529+x^4+y^4-46x^2-46y^2+2x^2y^2$$

$$28x^2+64y^2=448$$

$$7x^2+16y^2=112$$

Como tal, es la ecuación de una elipse.

5. **Dos de los vértices de un triángulo son los puntos fijos $A(-1,3)$ y $B(5,1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si se mueve de tal manera que la pendiente del lado AC es siempre el doble de la del lado BC.**

   Primero tracemos el dibujo del problema (Figura 4.):

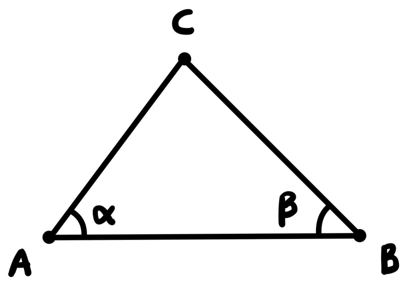

Figura 4. *Puntos del problema 5.*

Donde $C(x, y)$. *La pendiente del lado* AC *la denominaremos como* m_1*, mientras, que la del lado* BC *será* m_2. *Entonces:*

$$m_1 = 2m_2$$

Pero $m_1 = \tan\alpha$ *y* $m_2 = \tan\beta$*, entonces:*

$$\tan\alpha = 2\tan\beta$$

Ahora, podemos determinar las pendientes m_1 *y* m_2*:*

$$m_1 = \tan\alpha = \frac{y-3}{x+1}$$

$$m_2 = \tan\beta = \frac{y-1}{x-5}$$

Reemplazando:

$$\frac{y-3}{x+1} = 2\left(\frac{y-1}{x-5}\right)$$

$$(y-3)(x-5) = 2(y-1)(x+1)$$

$$yx - 5y - 3x + 15 = 2yx + 2y - 2x - 2$$

$$-xy - 7y - x + 17 = 0$$

$$x + 7y + xy - 17 = 0$$