Segundo Examen Parcial
Geometría Analítica

Agosto 2022

1. **Demuestre que la distancia d de la recta dada:**

$$Ax + By + C = 0$$

al punto $P_1(x_1, y_1)$ se obtiene por:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

¿Qué representa el signo del radical en el denominador?

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 1.), donde $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

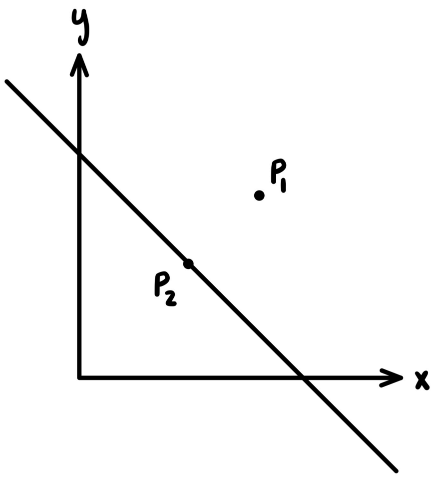

Figura 1. *Distancia de un punto P_1 a una recta.*

Notemos que el punto P_2 pertenece a la recta dada. Además, la recta se puede representar como:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Cuya pendiente es:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ahora, para obtener la pendiente de una segunda recta ortogonal a la recta dada inicialmente se puede usar la siguiente relación:

$$m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{B}{A}$$

Esta segunda recta debe pasar por P_1*, por lo que:*

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$$

$$Ay - Ay_1 = Bx - Bx_1$$

$$Ay - Ay_1 - Bx + Bx_1 = 0$$

Con estas dos ecuaciones podemos hacer lo siguiente:

$$A(Ax + By + C) - B(Ay - Ay_1 - Bx + Bx_1) = 0$$

$$A^2x + ABy + AC - BAy + BAy_1 + B^2x - B^2x_1 = 0$$

$$A^2x + AC + BAy_1 + B^2x - B^2x_1 = 0$$

$$(A^2 + B^2)x = B^2x_1 - BAy_1 - AC$$

$$x = \frac{B^2x_1 - BAy_1 - AC}{A^2 + B^2}$$

También podemos realizar la siguiente suma:

$$B(Ax + By + C) + A(Ay - Ay_1 - Bx + Bx_1) = 0$$

$$BAx + B^2y + BC + A^2y - A^2y_1 - ABx + ABx_1 = 0$$

$$B^2y + BC + A^2y - A^2y_1 + ABx_1 = 0$$

$$(B^2 + A^2)y = A^2y_1 - ABx_1 - BC$$

$$y = \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{B^2 + A^2}$$

De momento, tenemos las siguientes dos expresiones (con algunos términos reorganizados):

$$x = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2}$$

$$y = \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2}$$

Dado que P_2 pertenece a la recta planteada por el ejercicio:

$$x_2 = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2}$$

$$y_2 = \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2}$$

Ahora, calculemos la distancia entre P_1 y P_2:

$$d = \overline{P_1P_2} = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \pm\sqrt{\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2} - y_1\right)^2}$$

Reduzcamos la raíz cuadrada:

$$\sqrt{\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC - A^2x_1 - B^2x_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC - A^2y_1 - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{-ABy_1 - AC - A^2x_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-ABx_1 - BC - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

Por ende:

$$d = \pm\sqrt{\left(\frac{-ABy_1 - AC - A^2x_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{-ABx_1 - BC - B^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$d = \pm\sqrt{(-A)^2\left(\frac{By_1 + C + Ax_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + (-B)^2\left(\frac{Ax_1 + C + By_1}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$d = \pm\sqrt{A^2\left(\frac{By_1 + C + Ax_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + B^2\left(\frac{Ax_1 + C + By_1}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$d = \pm\sqrt{(A^2 + B^2)\left(\frac{By_1 + C + Ax_1}{A^2 + B^2}\right)^2} = \pm\sqrt{(A^2 + B^2)\frac{(By_1 + C + Ax_1)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{(By_1 + C + Ax_1)^2}{A^2 + B^2}} = \pm\frac{By_1 + C + Ax_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo representa si el punto P_1 se encuentra del mismo lado que el origen con respecto a la recta (signo negativo) o si el punto y el origen están en lados opuestos cpn respecto a la recta (signo positivo).

2. **Demuestre que las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos suplementarios formados por dos rectas que se cortan,** $L_1 : Ax+By+C = 0$ **y** $L_2 : A'x+B'y+C' = 0$ **son:**

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Primero, tracemos el dibujo del problema (Figura 2.):

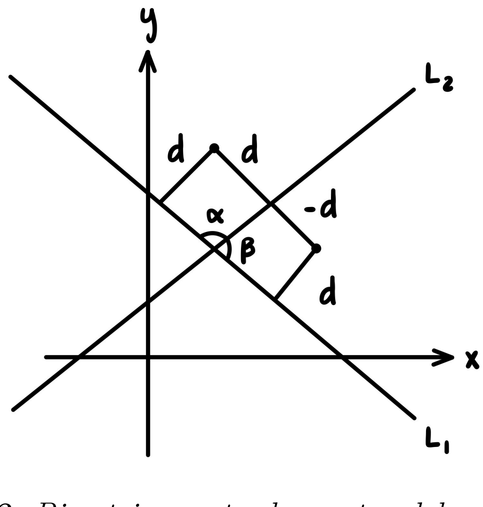

Figura 2. *Bisectrices entre las rectas del problema 2.*

Analicemos el cuadrante donde se encuentra el ángulo α. Para L_1, el punto marcado no se encuentra del mismo lado que el origen, por lo que, $d > 0$. Para L_2 ocurre lo mismo, por lo que:

$$d = d$$

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Ahora, analicemos el cuadrante donde se encuentra el ángulo β. Para L_1, el punto marcado no se encuentra del mismo lado que el origen, por lo que, $d > 0$. Para L_2, el punto marcado si se encuentra del mismo lado, por lo que, $d < 0$. Es decir:

$$d = -d$$

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

3. **Reducir a la forma normal las ecuaciones y hallar p y α.**
   a) $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$
   b) $3x - 4y - 6 = 0$
   c) $x + y + 8 = 0$
   d) $12x - 5y = 0$

Para el inciso a):

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$$

Dividiendo la ecuación entre r:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

Dado que los coeficientes de x, y son positivos, α se encuentra en el primer cuadrante. Por ende:

$$p = \frac{9}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$$

Para el inciso b):

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Dividiendo la ecuación entre r:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

Dado que el coeficiente de x es positivo y el de y es negativo, α se encuentra en el cuarto cuadrante. Por ende:

$$p = \frac{6}{5}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = 306.86^\circ$$

Para el inciso c):

$$r = -\sqrt{1^2 + 1^2} = -\sqrt{2}$$

Dividiendo la ecuación entre r:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$$

Dado que los coeficientes de x, y son negativos, α se encuentra en el tercer cuadrante. Por ende:

$$p = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 225^\circ$$

Para el inciso d):

$$r = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = -13$$

Dividiendo la ecuación entre r:

$$-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y = 0$$

Dado que el coeficiente de x es negativo y el de y es positivo, α se encuentra en el segundo cuadrante. Por ende:

$$p = 0$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{12}{13}\right) = 157.38°$$

4. **Hallar el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo de lados:**

$$l_1 : 7x - y = -11$$

$$l_2 : x + y = 15$$

$$l_3 : 7x + 17y = -65$$

Localicemos un punto $P(x, y)$ dentro del triángulo que forman las tres rectas (Figura 3.) con el fin de usar lo probado en el problema 2. Primero, llevemos las ecuaciones a la forma $Ax + By + C = 0$:

$$l_1 : 7x - y + 11 = 0$$

$$l_2 : x + y - 15 = 0$$

$$l_3 : 7x + 17y + 65 = 0$$

Analizando la bisectriz de las rectas l_1 y l_2, se observa en la Figura 3. que el punto P se encuentra del mismo lado que el origen para ambas rectas. Esto implica que:

$$-d_1 = -d_2$$

$$d_1 = d_2$$

$$\frac{7x - y + 11}{\pm\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{x + y - 15}{\pm\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$\frac{7x - y + 11}{\pm 5\sqrt{2}} = \frac{x + y - 15}{\pm\sqrt{2}}$$

Dado que l_1 tiene intersección con el eje negativo de x, y l_2 en el eje positivo de x, el signo del lado izquierdo de la ecuación anterior será negativo, mientras que el del lado derecho será positivo:

$$\frac{7x - y + 11}{-5\sqrt{2}} = \frac{x + y - 15}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{7x - y + 11}{-5} = x + y - 15$$

$$7x - y + 11 = -5x - 5y + 75$$

$$12x + 4y - 64 = 0$$

Ahora, analizando la bisectriz de las rectas l_1 y l_3, se observa en la Figura 3. que el punto P se encuentra del mismo lado que el origen para ambas rectas. Esto implica que:

$$-d_1 = -d_3$$

$$d_1 = d_3$$

$$\frac{7x - y + 11}{\pm\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{7x + 17y + 65}{\pm\sqrt{7^2 + 17^2}}$$

$$\frac{7x - y + 11}{\pm 5\sqrt{2}} = \frac{7x + 17y + 65}{\pm 13\sqrt{2}}$$

Dado que l_1 tiene intersección con el eje negativo de x, y l_3 también, el signo en ambos lados de la ecuación anterior será negativo:

$$\frac{7x - y + 11}{-5\sqrt{2}} = \frac{7x + 17y + 65}{-13\sqrt{2}}$$

$$\frac{7x - y + 11}{5} = \frac{7x + 17y + 65}{13}$$

$$91x - 13y + 143 = 35x + 85y + 325$$

$$56x - 98y - 182 = 0$$

Es decir, tenemos un sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$12x + 4y - 64 = 0$$

$$56x - 98y - 182 = 0$$

Al resolverse:

$$x = 5$$

$$y = 1$$

Es decir, que el punto de intersección de las bisectrices será $P(5,1)$.

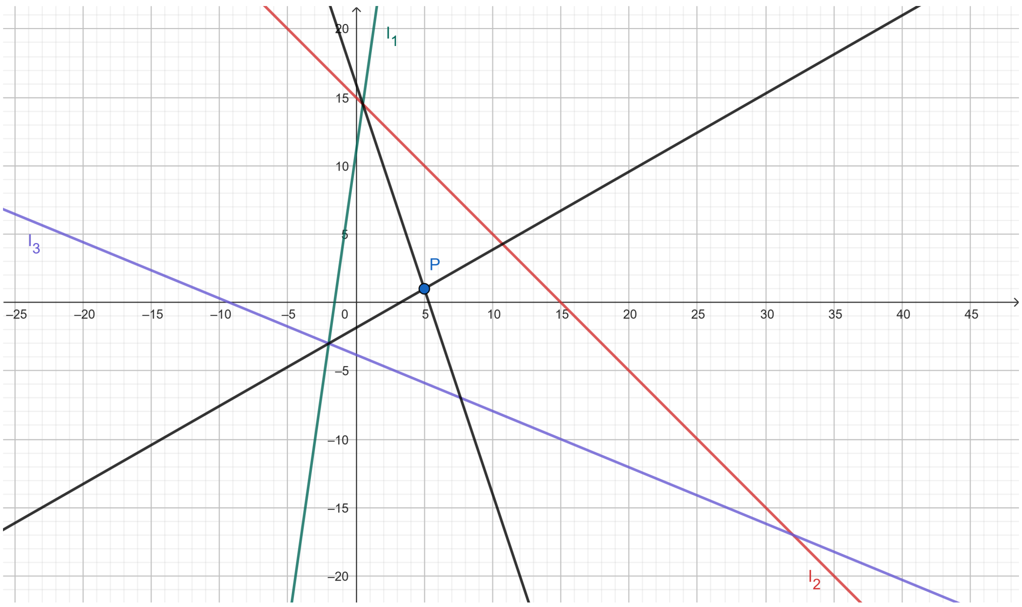

Figura 3. *Punto de intersección de las bisectrices.*

5. **Dado el triángulo de vértices $A(-2,1)$, $B(5,4)$ y $C(2,-3)$, hallar la longitud de la altura correspondiente al vértice A y el área del mismo.**

   En este problema no es necesario realizar gráficas, ya que, lo que hay que comprender es que solicita la distancia desde el punto A hasta la recta que forman los otros dos vértices (B y C en este caso).

   Para encontrar dicha recta:

$$y - (-3) = \frac{4 - (-3)}{5 - 2}(x - 2)$$

$$y + 3 = \frac{7}{3}(x - 2)$$

$$y + 3 = \frac{7}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{23}{3}$$

Ahora, debemos llevar esta ecuación a la forma $Ax + By + C = 0$:

$$3y = 7x - 23$$

$$7x - 3y - 23 = 0$$

Reemplazando:

$$d = \frac{|7x - 3y - 23|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2}} = \frac{|7x - 3y - 23|}{\sqrt{58}}$$

Como queremos la distancia de esa recta al punto A:

$$d = \frac{|7(-2) - 3(1) - 23|}{\sqrt{58}} = \frac{|-40|}{\sqrt{58}} = \frac{40}{\sqrt{58}}$$

Ahora, para encontrar el área del triángulo, podemos calcular la distancia desde el punto B hasta C:

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-2)^2 + [4 - (-3)]^2} = \sqrt{58}$$

Entonces:

$$A = \frac{1}{2}(\sqrt{58})\left(\frac{40}{\sqrt{58}}\right) = 20$$

Si incluimos las respectivas unidades de distancia y área:

$$d = \frac{40}{\sqrt{58}}\, u$$

$$A = \frac{1}{2}(\sqrt{58})\left(\frac{40}{\sqrt{58}}\right) = 20\, u^2$$