Tercer Examen Parcial
Geometría Analítica

Agosto 2022

1. **Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son $P_1(-1,1)$, $P_2(3,5)$ y $P_3(5,-3)$.**

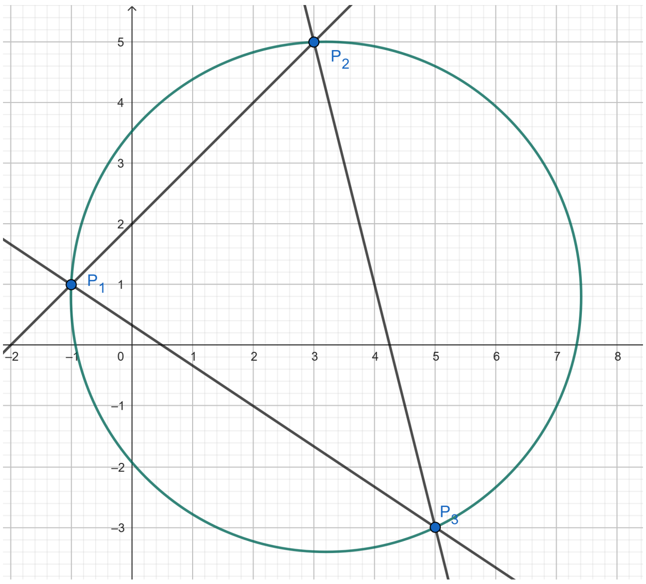

Figura 1. *Circunferencia circunscrita en el triángulo.*

El hecho de que la circunferencia debe ser circunscrito, indica que debe pasar por los puntos P_1, P_2 y P_3. Por ende, cada punto debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando cada punto en la ecuación anterior:

$$(-1)^2 + (1)^2 + D(-1) + E(1) + F = 0$$

$$(3)^2 + (5)^2 + D(3) + E(5) + F = 0$$

$$(5)^2 + (-3)^2 + D(5) + E(-3) + F = 0$$

Reorganizando:

$$2 - D + E + F = 0$$

$$34 + 3D + 5E + F = 0$$

$$34 + 5D - 3E + F = 0$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual puede resolverse:

$$D = -\frac{32}{5}$$

$$E = -\frac{8}{5}$$

$$F = -\frac{34}{5}$$

Reemplazando:

$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{34}{5} = 0$$

Completando binomios cuadrados perfectos:

$$x^2 - \frac{32}{5}x + \frac{256}{25} - \frac{256}{25} + y^2 - \frac{8}{5}y + \frac{16}{25} - \frac{16}{25} - \frac{34}{5} = 0$$

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 - \frac{256}{25} + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} - \frac{34}{5} = 0$$

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{442}{25} = 0$$

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$$

Y esta sería la ecuación de la circunferencia circunscrita en el triángulo (Figura 1.), cuyo centro y radio son:

$$C\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$r = \frac{\sqrt{442}}{5}$$

2. **Determine la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, $P_1(4, -1)$, $P_2(0, -7)$ y $P_3(-2, -3)$.**

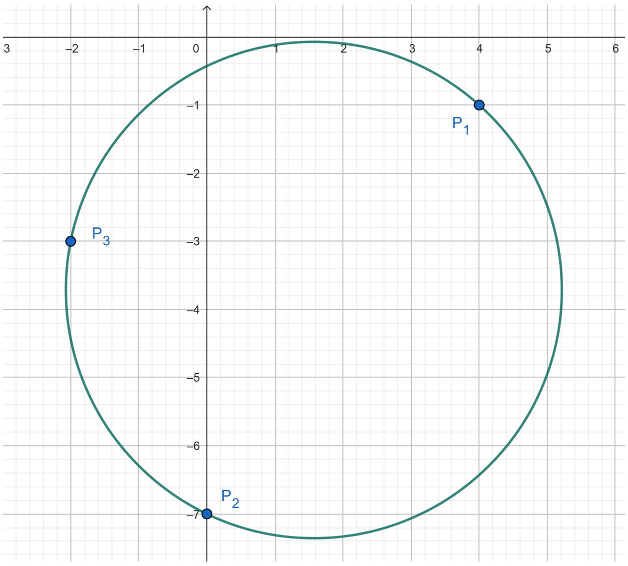

Figura 2. *Circunferencia asociada a los tres puntos del problema.*

Cada punto debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Reemplazando cada punto en la ecuación anterior:

$$(4)^2 + (-1)^2 + D(4) + E(-1) + F = 0$$

$$(0)^2 + (-7)^2 + D(0) + E(-7) + F = 0$$

$$(-2)^2 + (-3)^2 + D(-2) + E(-3) + F = 0$$

Reorganizando:

$$17 + 4D - E + F = 0$$

$$49 - 7E + F = 0$$

$$13 - 2D - 3E + F = 0$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual puede resolverse:

$$D = -\frac{22}{7}$$

$$E = \frac{52}{7}$$

$$F = 3$$

Reemplazando:

$$x^2 + y^2 - \frac{22}{7}x + \frac{52}{7}y + 3 = 0$$

Completando binomios cuadrados perfectos:

$$x^2 - \frac{22}{7}x + \frac{121}{49} - \frac{121}{49} + y^2 + \frac{52}{7}y + \frac{676}{49} - \frac{676}{49} + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{7}\right)^2 - \frac{121}{49} + \left(y + \frac{26}{7}\right)^2 - \frac{676}{49} + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{26}{7}\right)^2 - \frac{650}{49} = 0$$

$$\left(x - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{26}{7}\right)^2 = \frac{650}{49}$$

Y esta sería la ecuación de la circunferencia (Figura 2.), cuyo centro y radio son:

$$C\left(\frac{11}{7}, -\frac{26}{7}\right)$$

$$r = \frac{5\sqrt{26}}{7}$$

3. **Las ecuaciones de dos circunferencias son:**

$$C_1 : x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - x - 6y + 3 = 0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia C_3 que pasa por las intersecciones de C_1 y C_2, y tiene su centro sobre la recta:

$$l : x - y - 2 = 0$$

Lo primero que debemos hacer es completar binomios cuadrados perfectos en las ecuaciones C_1 y C_2. Para C_1:

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + y^2 - 10y + 25 - 25 + 31 = 0$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + (y-5)^2 - 25 + 31 = 0$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-5)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = \frac{25}{4}$$

Para C_2:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 - 9 + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-3)^2 - 9 + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}$$

Por ende, podemos igualar ambas ecuaciones:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 7x + \frac{49}{4} + y^2 - 10y + 25$$

$$-x + \frac{1}{4} - 6y + 9 = 7x + \frac{49}{4} - 10y + 25$$

$$4y = 8x + 28$$

$$y = 2x + 7$$

La última ecuación es la recta en la que se encuentran las dos intersecciones de C_1 y C_2. Al reemplazarla en C_2:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (2x + 7 - 3)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + (2x + 4)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + 4x^2 + 16x + 16 = \frac{25}{4}$$

$$5x^2 + 15x + 10 = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) = 0$$

Por ende:

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = -2$$

Reemplazando, se pueden obtener los puntos de intersección:

$$y_1 = 2x_1 + 7 = 2(-1) + 7 = 5$$

$$y_2 = 2x_2 + 7 = 2(-2) + 7 = 3$$

$$I_1(-1, 5)$$

$$I_2(-2, 3)$$

Ahora, sabemos que el centro de la circunferencia se encuentra en la recta l, por lo que:

$$C(x_0, y_0) = C(x_0, x_0 - 2)$$

$$(x - x_0)^2 + [y - (x_0 - 2)]^2 = r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - x_0 + 2)^2 = r^2$$

Como I_1 e I_2 deben cumplir con la ecuación anterior:

$$(-1 - x_0)^2 + (5 - x_0 + 2)^2 = r^2$$

$$(-2 - x_0)^2 + (3 - x_0 + 2)^2 = r^2$$

Igualando:

$$(-1 - x_0)^2 + (5 - x_0 + 2)^2 = (-2 - x_0)^2 + (3 - x_0 + 2)^2$$

$$(1 + x_0)^2 + (7 - x_0)^2 = (2 + x_0)^2 + (5 - x_0)^2$$

$$1 + 2x_0 + x_0^2 + 49 - 14x_0 + x_0^2 = 4 + 4x_0 + x_0^2 + 25 - 10x_0 + x_0^2$$

$$50 - 12x_0 = -6x_0 + 29$$

$$21 = 6x_0$$

$$x_0 = \frac{7}{2}$$

Por ende:

$$C(x_0, x_0 - 2) = C\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2} - 2\right) = C\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

De este modo, la ecuación de la circunferencia debe ser:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=r^2$$

Como I_1 pertenece a la circunferencia:

$$\left(-1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(5-\frac{3}{2}\right)^2=r^2$$

$$\frac{65}{2}=r^2$$

Finalmente:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$$

Esta es la circunferencia C_3 que solicita el problema, la cual puede apreciarse en la Figura 3.:

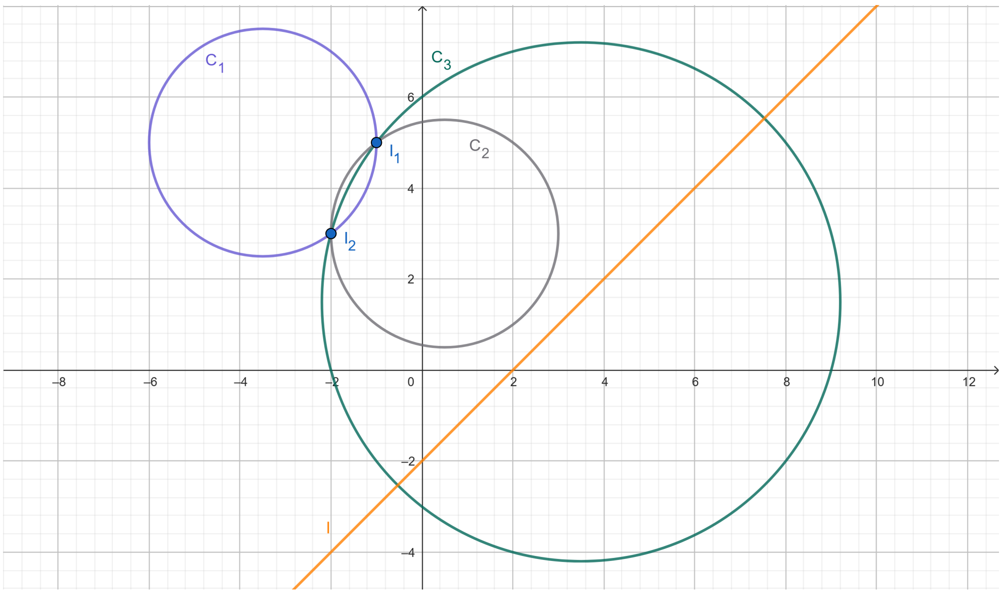

Figura 3. *Circunferencia C_3 del problema 3.*

4. **Encuentre la longitud de la tangente trazada del punto $(-3,2)$ a la circunferencia:**

$$C: 9x^2+9y^2-30x-18y-2=0$$

Lo primero que debemos hacer es completar binomios cuadrados perfectos en la ecuación de la circunferencia C:

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x - 2y - \frac{2}{9} = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} - \frac{25}{9} + y^2 - 2y + 1 - 1 - \frac{2}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + (y-1)^2 - 1 - \frac{2}{9} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Ahora, para calcular la distancia que se solicita en el problema debemos emplear la siguiente expresión:

$$t = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

Donde:

$$h = \frac{5}{3}$$

$$k = 1$$

$$r^2 = 4$$

Sustituyendo:

$$t = \sqrt{\left(-3 - \frac{5}{3}\right)^2 + (2-1)^2 - 4} = \frac{13}{3}$$

5. **Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ y que tiene una pendiente $m = 1$.**

   La recta tangente debe tener la forma:

$$y = x + k$$

   Reemplazando:

$$x^2 + (x+k)^2 - 10x + 2(x+k) + 18 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2xk + k^2 - 10x + 2x + 2k + 18 = 0$$

$$2x^2 + (2k-8)x + (k^2 + 2k + 18) = 0$$

Entonces, el discriminante debe ser:

$$\Delta = (2k-8)^2 - 4(2)(k^2 + 2k + 18)$$

$$\Delta = 4k^2 - 32k + 64 - 8k^2 - 16k - 144$$

$$\Delta = -4k^2 - 48k - 80$$

Dado que $\Delta = 0$*:*

$$-4k^2 - 48k - 80 = 0$$

$$k^2 + 12k + 20 = (k+10)(k+2) = 0$$

Por ende:

$$k_1 = -10$$

$$k_2 = -2$$

Por lo que, las ecuaciones tangentes a la circunferencia son:

$$l_1 : y = x - 10$$

$$l_2 : y = x - 2$$

Lo cual se puede apreciar en la Figura 4:

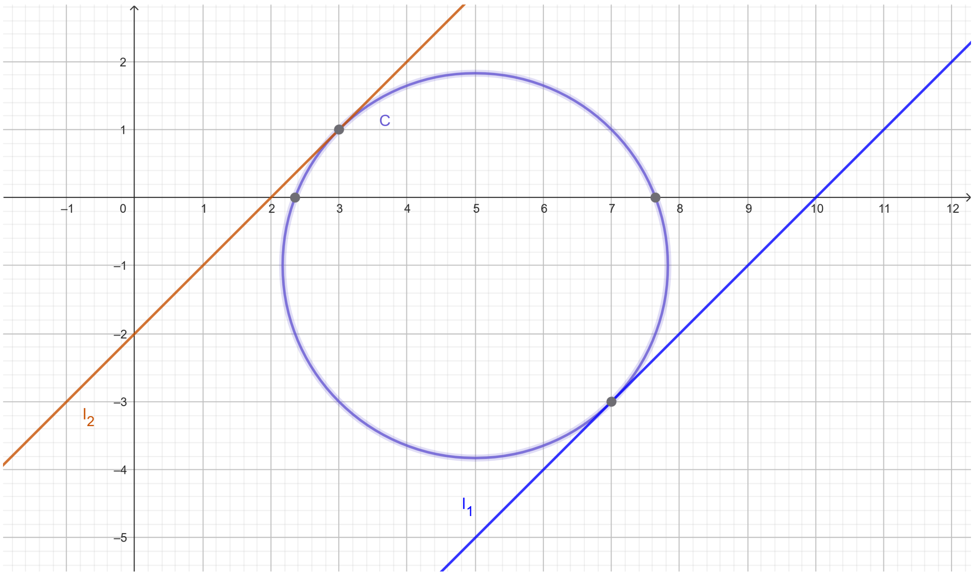

Figura 4. *Rectas tangentes del problema 5.*