Primer Examen Parcial
Geometría Analítica

Agosto 2023

1. **Los puntos extremos de un segmento son,** $P_1(2,4)$ **y** $P_2(-1,-1)$**. Hallar el punto** $P(x,y)$ **que divide este segmento de la forma,** $P_2P : PP_1 = -3$

Lo primero que debemos recordar, es que en geometría analítica los segmentos tienen un sentido y dirección, que depende del punto inicial y del punto final, siempre el sentido positivo será del punto inicial P_1 al punto final P_2.
Por definición, si un punto P, divide un segmento a una razón r, esta se calcula como:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

Es decir, la razón es el cociente del segmento que va del punto inicial P_1 al punto P, entre el segmento que va del punto P al punto final P_2.
Nosotros lo que sabemos es que el segmento que va del punto P_2 al punto P dividido entre el segmento que va del punto P al punto P_1 es:

$$\frac{P_2P}{PP_1} = -3$$

Usando que $P_1P = -PP_1$ y $P_2P = -PP_2$, invertimos el cociente:

$$\frac{PP_1}{P_2P} = \frac{-1}{3}$$

$$\frac{PP_1}{P_2P} = \frac{-P_1P}{-PP_2} = \frac{-1}{3} = r$$

Finalmente usamos:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{2 + (\frac{-1}{3})(-1)}{1 + (\frac{-1}{3})} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{4 + (\frac{-1}{3})(-1)}{1 + (\frac{-1}{3})} = \frac{13}{2}$$

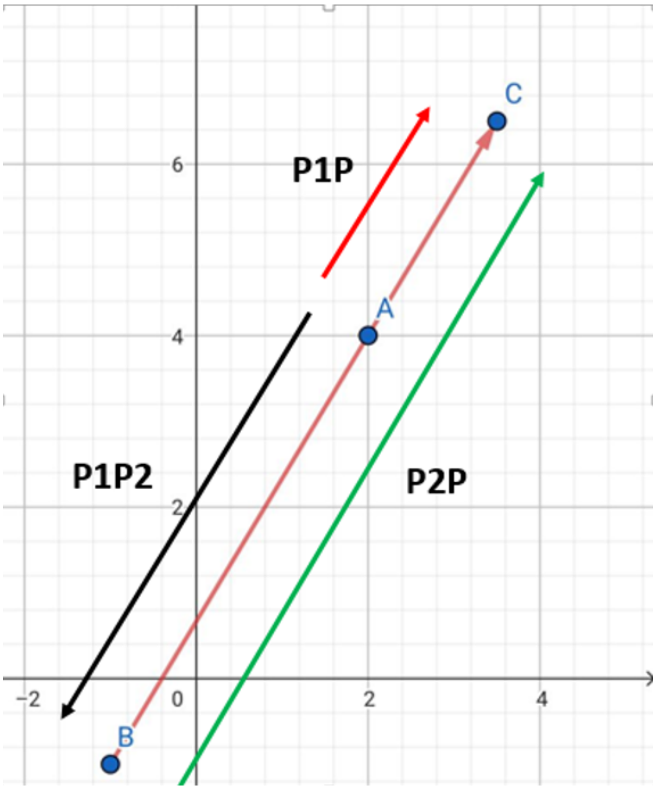

Figura 1: *Recuerda que un segmento es positivo si va en la misma dirección que el segmento P_1P_2 o bien del punto inicial A al punto fina B, y negativo si va en la dirección opuesta.*

2. **Demostrar que los puntos $A(0,1)$, $B(3,5)$, $C(7,2)$, $D(4,-2)$ son los vértices de un cuadrado, demuestre ademas que las diagonales se interceptan en un su punto medio.**

   Para demostrar que los puntos son los vértices de un cuadrado, primero debemos preguntarnos por las características de este polígono, es decir, que sus lados son de la misma longitud y que los cuatro ángulos internos son de 90^o.

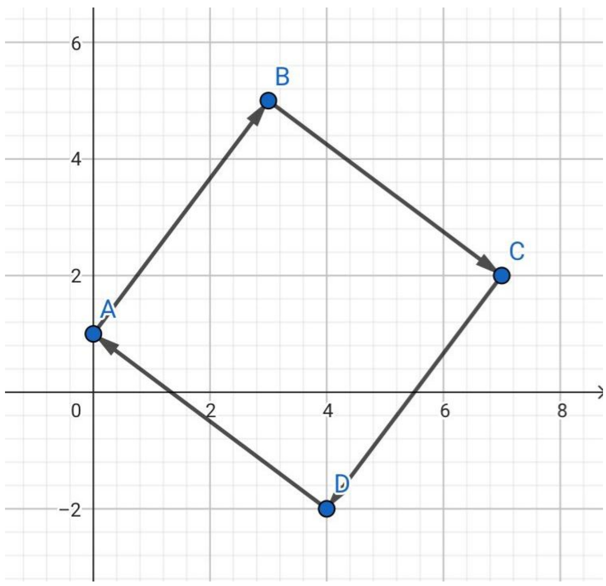

Figura 2: *Cuadrado formado por los puntos A, B, C, D.*

Para que se cumpla eso, los segmentos AB, BC, CD y DA deben de ser de la misma longitud.
La distancia entre dos puntos P_1 y P_2 puede calcularse usando en teorema de pitagoras:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Entonces:

$$d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(B, C) = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(C, D) = \sqrt{(4-7)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(D, A) = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Luego, sabemos que dos rectas son perpendiculares si se cumple que sus pendientes son de signo opuesto y ademas son inversas entre si, es decir:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Donde la pendiente de la recta que une a dos puntos la calculamos como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces:

$$m_{AB} = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{2-5}{7-3} = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{4/3} = -\frac{1}{m_{AB}}$$

$$m_{CD} = \frac{-2-2}{4-7} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} = -\frac{1}{-3/4} = -\frac{1}{m_{BC}}$$

$$m_{DA} = \frac{1-(-2)}{0-4} = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{4/3} = -\frac{1}{m_{CD}}$$

Con esto queda demostrado que son los puntos A,B,C,D son los vértices de un cuadrado.
Luego, para demostrar que las diagonales se interceptan en su punto medio, lo que haremos sera calcular en punto medio de cada una de las diagonales y ver que en ambas coincide

con el punto de intersección de sus correspondientes rectas.
Para algún segmento de recta su punto medio esta dado por:

$$P_M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Entonces para la diagonal formada por el segmento AC:

$$P_{AC} = (\frac{0 + 7}{2}, \frac{1 + 2}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$$

Para la diagonal formada por el segmento BD:

$$P_{AC} = (\frac{3 + 4}{2}, \frac{5 - 2}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$$

Ademas el punto de intersección lo encontramos al igualar la ecuación de cada una de las rectas:

$$AC(-x + 7y = 7)$$

$$BD(7x + y = 26)$$

$$-7x + 26 = \frac{x}{7} + 1$$

$$-7x - \frac{x}{7} = -\frac{50x}{7} = -25$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{x}{7} + 1 = \frac{7/2}{7} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

$$y = \frac{3}{2}$$

3. **Demuestre que $A(1,1)$, $B(5,3)$ y $C(6,-4)$ son vértices de un triangulo isósceles, es decir, con dos lados iguales.**
Para que el triangulo sea isósceles dos de sus lados deben ser iguales, así que debemos calcular la distancia entre los puntos AB, BC y CA y verificar que secumple.

$$d(A,B) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(6-5)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

$$d(C,A) = \sqrt{(1-6)^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

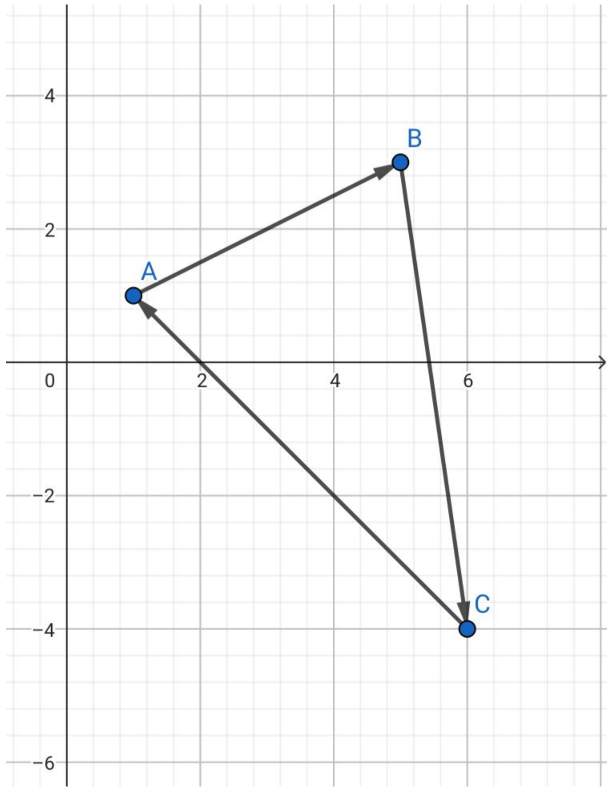

Figura 3: *Triangulo formado por los puntos A, B, C.*

Con esto es suficiente para ver que efectivamente se trata de un triangulo isósceles.

4. **Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se bisecan entre si.**
Lo que debemos hacer es mostrar que para un cuadrilátero cualquiera formado por los puntos A, B, C, D, los puntos medios de los segmentos de recta EF y GH coinciden en el mismo punto. Donde los puntos E, F, G, H son los puntos medios de cada uno de los lados del cuadrilatero.
Para facilitar los calculos colocaremos el punto A sobre el origen es decir $A(0,0)$*, mientras que* $B(a,b)$*,* $C(c,d)$*,* $D(e,f)$ *y por tanto los puntos E, F, G, H tendran las coordenadas:*

$$E = (\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$$

$$F = (\frac{e}{2}, \frac{f}{2})$$

$$G = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$$

$$H = (\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2})$$

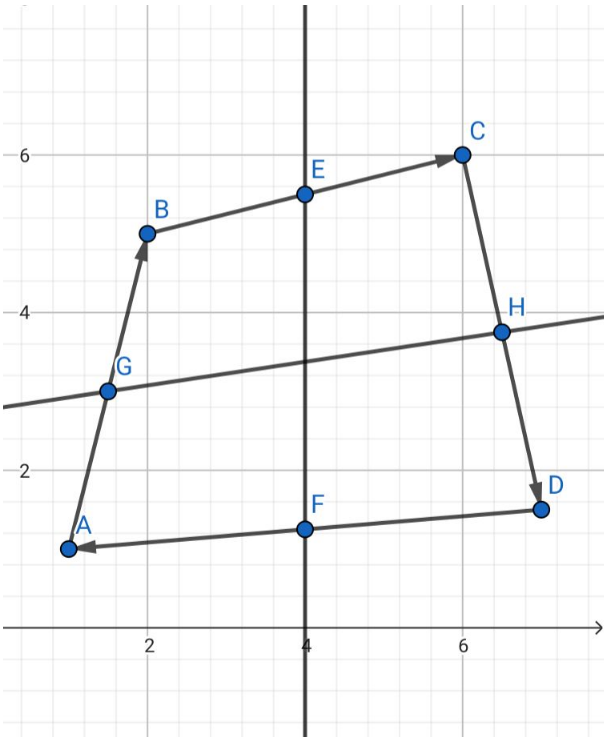

Figura 4: *Cuadrilatero arbitrario formado por los puntos A,B,C,D.*

Asi, el punto mendio del segmento de recta EF sera:

$$M_{EF} = (\frac{a+c+e}{2}, \frac{b+d+f}{2})$$

Mientras que del segmento GH el punto medio es:

$$M_{GH} = (\frac{a+c+e}{2}, \frac{b+d+f}{2})$$

Vemos que efectivamente son el mismo punto y por tanto queda demostrado que dichas rectas se bisecan.