Cuarto Examen Parcial
Mecanica II

Agosto 2024

1. **Calcula los momentos de inercia I_1, I_2 e I_3 de un cono homogéneo de masa M, altura h y radio R. Escoja el eje x_3 a lo largo del eje de simetría del cono. Después realice una transformación del sistema de referencia de tal manera que el origen es ahora el centro de masa del cono y encuentre los momentos de inercia.**

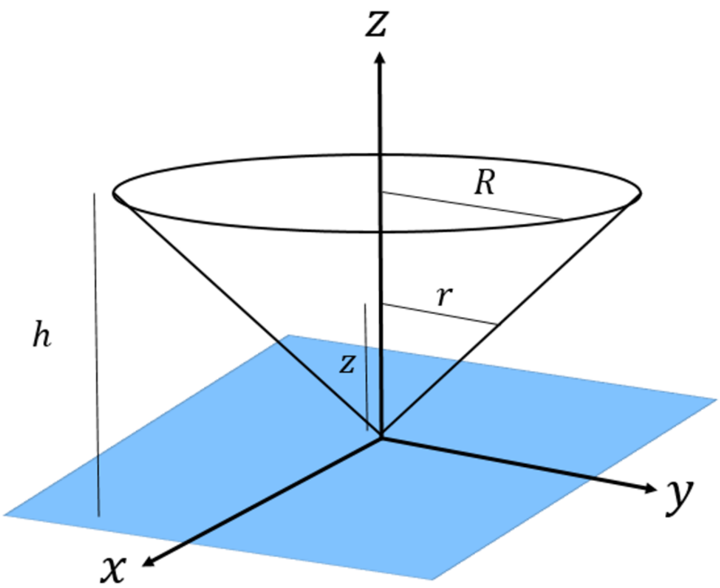

Figura 1: *Tenemos un cono solido donde el origen del sistema de coordenadas esta en la punta del mismo.*

Tomaremos para los ejes coordenados $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$. Los elementos del tensor de inercia entonces los estimamos a partir de:

$$I_{ij} = \int \rho \left[\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j \right] dv$$

Determinamos el elemento I_{11} sustituyendo $i = 1$ y $j = 1$.

$$I_{11} = \int \rho \left[\delta_{11} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) - x_1 x_1 \right] dv$$

$$I_{11} = \int \rho \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2\right] dv$$

$$I_{11} = \int \rho \left(x_2^2 + x_3^2\right) dv$$

$$I_{11} = \int \rho \left(y^2 + z^2\right) dv$$

Lo que tenemos es una integral sobre el volumen del cono, por lo que usaremos coordenadas cilíndricas para facilitar la integral:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

$$I_{11} = \int \rho \left(r^2 \sin^2\theta + z^2\right) r dr d\theta dz$$

Donde ademas tenemos que:

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{h}$$

Por lo que los limites de integración estarán dados por $\theta : [0, 2\pi]$, $z : [0, h]$ *y* $r : [0, z\frac{R}{h}]$, *entonces tenemos:*

$$I_{11} = \rho \left(\int_0^h \int_0^{z\frac{R}{h}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta r d\theta dr dz + \int_0^h \int_0^{z\frac{R}{h}} \int_0^{2\pi} z^2 r d\theta dr dz \right)$$

Obviaremos que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$$

$$I_{11} = \rho \left(\pi \int_0^h \int_0^{z\frac{R}{h}} r^3 dr dz + 2\pi \int_0^h \int_0^{z\frac{R}{h}} z^2 r dr dz \right)$$

$$I_{11} = \rho\pi \int_0^h \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{z\frac{R}{h}} dz + 2\rho\pi \int_0^h z^2 \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{z\frac{R}{h}} dz$$

$$I_{11} = \rho\pi \int_0^h \frac{z^4}{4}\left(\frac{R}{h}\right)^4 dz + 2\rho\pi \int_0^h z^2\frac{z^2}{2}\left(\frac{R}{h}\right)^2 dz$$

$$I_{11} = \rho\pi \left(\frac{R}{h}\right)^4 \int_0^h \frac{z^4}{4}dz + 2\rho\pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h \frac{z^4}{2}dz$$

$$I_{11} = \rho\pi \left(\frac{R}{h}\right)^4 \frac{h^5}{20} + 2\rho\pi \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{h^5}{10}$$

$$I_{11} = \rho\pi \left(\frac{hR^4}{20} + \frac{h^3R^2}{5}\right)$$

Pero:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi hR^2}$$

$$I_{11} = \frac{3M}{\pi hR^2}\pi \left(\frac{hR^4}{20} + \frac{h^3R^2}{5}\right)$$

$$I_{11} = \frac{3M}{20}\left(R^2 + 4h^2\right)$$

Por la simetría del cono con los ejes, los momentos de inercia I_{11} y I_{22} son iguales, por otra parte el momento de inercia I_{33} lo determinamos como:

$$I_{33} = \int \rho\left[x^2 + y^2 + z^2 - z^2\right] dv$$

$$I_{33} = \int \rho\left[x^2 + y^2\right] dv = \int (r^2) r dr d\theta dz$$

$$= 2\pi\rho \int_0^h \frac{r^4}{4}\Big|_0^{z\frac{R}{h}} dz$$

$$= 2\pi\rho \frac{R^4}{h^4} \int_0^h \frac{z^4}{4}dz$$

$$= 2\pi\rho \frac{R^4}{h^4}\frac{h^5}{20} = \pi\rho\frac{R^4 h}{10}$$

$$I_{33} = \pi\frac{3M}{\pi hR^2}\frac{R^4 h}{10}$$

$$I_{33} = \frac{3}{10}MR^2$$

El tensor de inercia nos queda como:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{3M}{20}\left(R^2+4h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{20}\left(R^2+4h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para determinar los momentos de inercia respecto a un sistema de referencia situado en el centro de masa, naturalmente debemos calcular la posición de este mismo; conocer la posición del centro de masa nos permite utilizar el teorema de los ejes paralelos, que de forma tensorial se escribe como:

$$J_{lm} = I_{lm} - M\left[\delta_{lm}\sum_k a_k^2 - a_l a_m\right]$$

Donde J_{lm} son los elementos del tensor de inercia respecto al sistema de referencia en el centro de masa, por otra parte I_{lm} son los elementos del tensor de inercia respecto a un sistema paralelo al centro de referencia, que en nuestro caso son los momentos de inercia I_{11}, I_{22} y I_{33} que calculamos previamente.

Luego, a_l, a_m son las componentes del vector de posición del centro de masa según corresponda. Para estimar estas componentes consideremos la simetría del cono, es decir, el centro de masa estará sobre el eje vertical por lo que las componentes en x, y o bien a_1,a_2 son cero y solo debemos calcular la componente en z, es decir:

$$\vec{R_{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho dv$$

$$\vec{R_{cm}} = \frac{\rho}{M}\int \vec{r}dv$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

De antemano sabemos que integrando sobre el volumen del cono para las componentes x, y nos da cero, pasamos directamente a calcular la componente z del centro de masa:

$$R_z = \frac{\rho}{M}\int_0^h \int_0^{z\frac{R}{h}} \int_0^{2\pi} (z) r d\theta dr dz$$

$$R_z = 2\pi\frac{\rho}{M}\int_0^h \int_0^{z\frac{R}{h}} (z) r dr dz$$

$$R_z = 2\pi\frac{\rho}{M}\int_0^h (z)\frac{1}{2}\left(z\frac{R}{h}\right)^2 dz$$

$$R_z = \pi \frac{\rho}{M} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \int_0^h z^3 dz$$

$$R_z = \pi \frac{\rho}{M} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{1}{4} h^4$$

$$R_z = \frac{1}{4} h^2 \pi \frac{R^2}{M} \frac{M}{\frac{1}{3}\pi h R^2}$$

$$R_z = \frac{3}{4} h$$

Entonces la posición del centro de masa esta dada por el vector $\vec{R_{cm}} = \vec{a} = (0, 0, \frac{3}{4}h)$ *y podemos calcular los elementos del tensor de inercia respecto al centro de masa:*

$$J_{lm} = I_{lm} - M \left[\delta_{lm} \sum_k a_k^2 - a_l a_m\right]$$

Tenemos entonces:

$$J_{11} = I_{11} - M \left[\delta_{11} \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - a_1^2\right]$$

$$J_{11} = I_{11} - M \left(a_3^2\right)$$

$$J_{11} = I_{11} - M \left(\frac{3}{4} h\right)^2$$

$$J_{11} = \frac{3M}{20} \left(R^2 + 4h^2\right) - M \frac{9}{16} h^2$$

$$J_{11} = \frac{3M}{20} \left(R^2 + \frac{1}{4} h^2\right)$$

Nuevamente por la simetría del cono $J_{11} = J_{22}$*, mientras que:*

$$J_{33} = I_{33} - M \left[\delta_{33} \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) - a_3^2\right]$$

$$J_{33} = I_{33} - M \left(a_1^2 + a_2^2\right)$$

$$J_{33} = I_{33}$$

Y ahora el tensor de inercia nos queda como:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3M}{20}\left(R^2+\frac{1}{4}h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{20}\left(R^2+\frac{1}{4}h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}$$

Este ultimo respecto al centro de masa del cono.

2. **Encuentre la frecuencia para pequeñas oscilaciones de un plato delgado, homogéneo si el movimiento tiene lugar en el plano del plato y si el plato tiene forma de un triangulo y es suspendido a) del punto medio de uno de sus lados y b) de uno de sus vértices. El plato esta bajo la acción de la gravedad.**

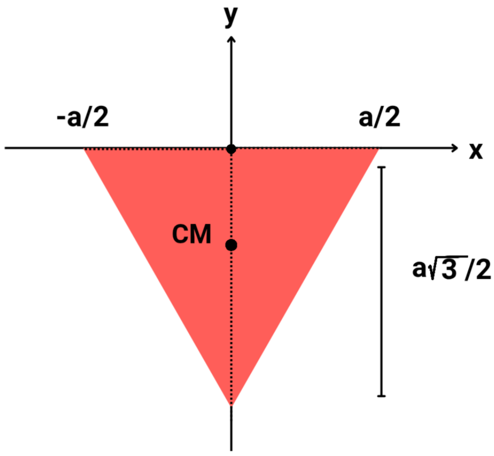

Figura 2: *Para el primer caso tenemos un triangulo equilátero colgado de la parte media de uno de sus lados de longitud a.*

Cuando el problema nos pide que determinemos la frecuencia para pequeñas oscilaciones, ya que se trata de un cuerpo rígido, el problema se refiere a las oscilaciones que hace el centro de masa como si fuera un péndulo. Así pues, para ello necesitamos conocer la posición del centro de masa así como el momento de inercia respecto al punto de giro; para ello determinamos la altura del triangulo y la ecuación de cada una de las rectas que tiene por lados:

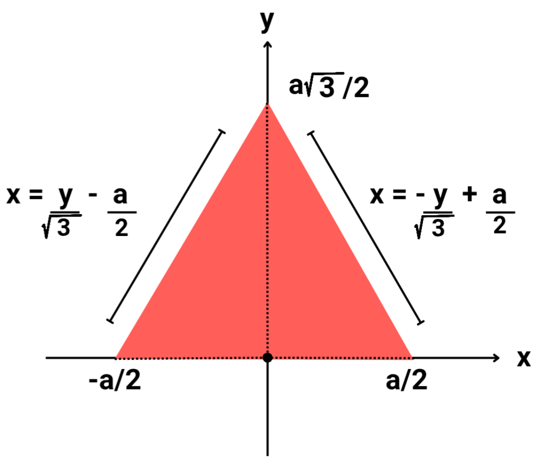

Figura 3: *Tenemos un triangulo equilátero de lados a, cuyos lados son las rectas con las ecuaciones mostradas.*

Comenzamos por determinar la posición del centro de masa, de la misma forma que el problema anterior, la simetría del triangulo equilátero nos sugiere que el centro de masa esta en este caso sobre el eje y, así tenemos que el vector de posición del centro de masa es:

$$\vec{R_{cm}} = \frac{\rho}{M} \int \vec{r} dA$$

Donde ahora sabemos que la integral sobre la componente en el eje x con los limites de integración :

$$x : \left[\left(\frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2} \right), \left(-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2} \right) \right]$$

$$y : \left[0, \frac{a\sqrt{3}}{2} \right]$$

Nos da cero, por lo que nos pasamos directamente a calcular la componente en y del centro de masa:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_y = \frac{\rho}{M} \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2}}^{-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2}} y dx dy$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M} \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \int_0^{-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2}} y dx dy$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M} \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} y \left(-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2} \right) dy$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M} \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left(-\frac{y^2}{\sqrt{3}} + \frac{ay}{2} \right) dy$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M} \left[-\frac{y^3}{3\sqrt{3}} + \frac{ay^2}{4} \right]_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M} \left[-\frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} + \frac{a}{4} \frac{3a^2}{4} \right]$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M} \left[-\frac{a^3}{8} + \frac{3a^3}{16} \right]$$

$$R_y = 2\frac{\rho}{M}\left[\frac{a^3}{16}\right]$$

$$R_y = \frac{2}{M}\frac{M}{A}\left[\frac{a^3}{16}\right]$$

$$R_y = \frac{2}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}\left[\frac{a^3}{16}\right]$$

$$R_y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

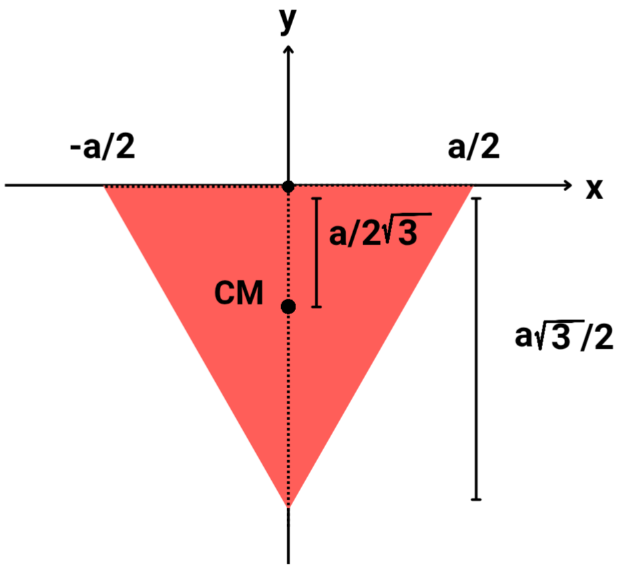

Figura 4: *Respecto al eje horizontal ahora sabemos que a una distancia de* $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ *esta el centro de masa.*

Ahora determinamos el momento de inercia respecto al eje de giro, en este caso el eje z *que sale de la pantalla en dirección a nosotros; para ello, buscamos el elemento* I_{33} *del tensor de inercia:*

$$I_{ij} = \int \rho\left[\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j\right] dA$$

$$I_{33} = \int \rho\left[\delta_{33}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - x_3^2\right] dA$$

$$I_{33} = \int \rho\left[\delta_{33}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right] dA$$

$$I_{33} = 2\rho\int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\int_0^{-\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{a}{2}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$I_{33} = 2\rho \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_0^{-\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{a}{2}} dy$$

$$I_{33} = 2\rho \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2}\right)^3 + \left(-\frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2}\right) y^2\right] dy$$

$$I_{33} = 2\rho \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{y^3\sqrt{3}}{9} + \frac{ay^2}{2} - \frac{3a^2y}{4\sqrt{3}} + \frac{a^3}{8}\right) + \left(-\frac{y^3}{\sqrt{3}} + \frac{ay^2}{2}\right)\right] dy$$

$$I_{33} = 2\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{y^4\sqrt{3}}{36} + \frac{ay^3}{6} - \frac{3a^2y^2}{8\sqrt{3}} + \frac{a^3y}{8}\right) + \left(-\frac{y^4}{4\sqrt{3}} + \frac{ay^3}{6}\right)\right]_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$I_{33} = 2\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{5y^4\sqrt{3}}{18} + \frac{4ay^3}{6} - \frac{3a^2y^2}{8\sqrt{3}} + \frac{a^3y}{8}\right)\right]_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$I_{33} = 2\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{18}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \frac{4a}{6}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{3a^2}{8\sqrt{3}}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{a^3}{8}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right]$$

$$I_{33} = 2\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{18}\left(\frac{9a^4}{16}\right) + \frac{4a}{6}\left(\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{3a^2}{8\sqrt{3}}\left(\frac{3a^2}{4}\right) + \frac{a^3}{8}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right]$$

$$I_{33} = 2a^4\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{32} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)\right]$$

$$I_{33} = 2a^4\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{8\sqrt{3}}{32} + \frac{5\sqrt{3}}{16}\right)\right]$$

$$I_{33} = 2a^4\rho \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{5\sqrt{3}}{16}\right)\right]$$

$$I_{33} = 2a^4\rho \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{16}\right)\right] = a^4\rho\left[\frac{1}{8\sqrt{3}}\right]$$

$$I_{33} = a^4\frac{M}{A}\left[\frac{1}{8\sqrt{3}}\right]$$

$$I_{33} = a^4\frac{M}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}\left[\frac{1}{8\sqrt{3}}\right]$$

$$I_{33} = \frac{Ma^2}{6}$$

Ahora si, ya con la posición del centro de masa así como el momento de inercia respecto al eje de giro, pasamos al planteamiento de las ecuaciones de movimiento, y para ello, la energía cinética y potencial del centro de masa:

$$T = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Ma^2}{6}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{Ma^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$U = -Mg\frac{a\cos\theta}{2\sqrt{3}}$$

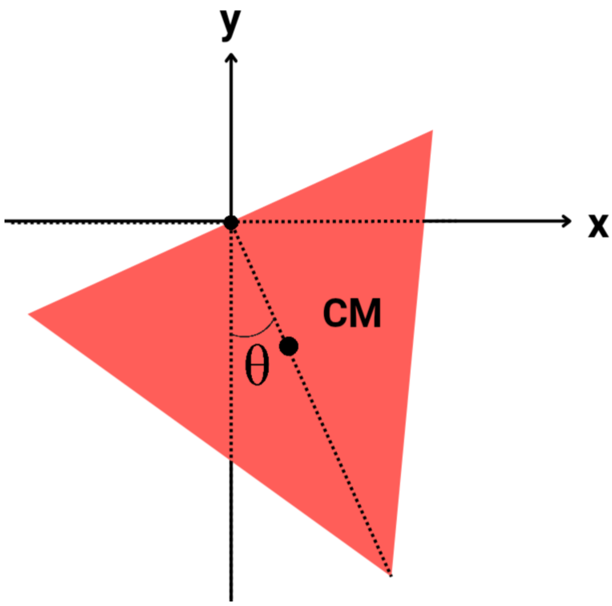

Figura 5: *Tenemos un péndulo físico, que podemos simplificar si lo consideramos como un péndulo ideal ubicado en su centro de masa*

El lagrangiano es:

$$L = T - U = \frac{Ma^2}{12}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{a\cos\theta}{2\sqrt{3}}$$

Ahora como bien sabemos, aplicamos la ecuación de Euler - Lagrange:

$$\frac{dL}{d\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = 0$$

$$-Mg\frac{a\sin\theta}{2\sqrt{3}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{Ma^2}{6}\dot{\theta}\right) = 0$$

$$-Mg\frac{a\sin\theta}{2\sqrt{3}} - \frac{Ma^2}{6}\ddot{\theta} = 0$$

Ordenamos la ecuación:

$$\frac{Ma^2}{6}\ddot{\theta} + Mg\frac{a\sin\theta}{2\sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{a^2}{6}\ddot{\theta} + \frac{ag}{2\sqrt{3}}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g\sqrt{3}}{a}\sin\theta = 0$$

La aproximación de ángulos pequeños es $\sin\theta \approx \theta$ *por lo que nos quedamos con la ecuación del oscilador armónico simple, donde ya conocemos la frecuencia de oscilación:*

$$\ddot{\theta} + \frac{g\sqrt{3}}{a}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g\sqrt{3}}{a}$$

Por otra parte, para el inciso b) debemos realizar el mismo proceso, ahora colgando el cuerpo rígido de uno de sus vértices. Igualmente debemos estimar la ecuación de cada uno de los lados del triangulo:

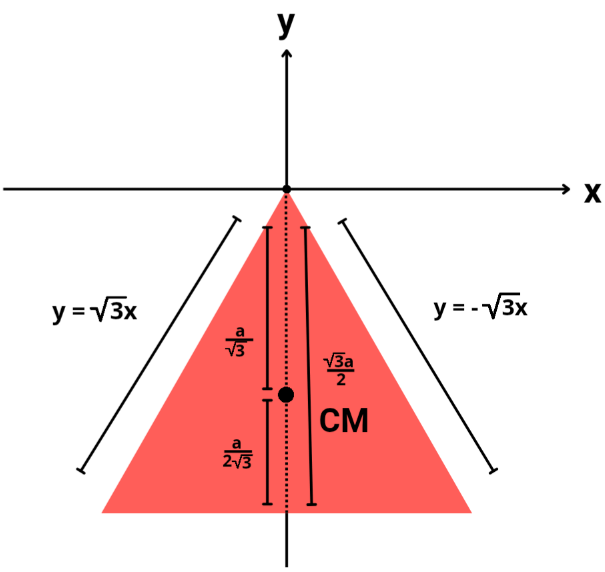

Figura 6: *Ahora tenemos el cuerpo rígido colgado de uno de sus vértices, igualmente determinamos la ecuación de las rectas que el triangulo tiene por lado.*

$$I_{ij} = \int \rho \left[\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} x_k^2 - x_i x_j \right] dA$$

$$I_{33} = \int \rho \left[\delta_{33} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) - x_3^2 \right] dA$$

$$I_{33} = \int \rho \left[\delta_{33} \left(x_1^2 + x_2^2 \right) \right] dA$$

$$I_{33} = 2\rho \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{0} \int_{0}^{-\frac{y}{\sqrt{3}}} \left(x^2 + y^2 \right) dxdy$$

$$I_{33} = 2\rho \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{0} \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_0^{-\frac{y}{\sqrt{3}}} dy$$

$$I_{33} = 2\rho \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{0} \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{y}{\sqrt{3}} \right)^3 + \left(-\frac{y}{\sqrt{3}} \right) y^2 \right] dy$$

$$I_{33} = 2\rho \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{0} \left[-\frac{y^3}{9\sqrt{3}} - \frac{y^3}{\sqrt{3}} \right] dy$$

$$I_{33} = 2\rho \left(-\frac{10}{9\sqrt{3}} \right) \int_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{0} y^3 dy$$

$$I_{33} = 2\rho \left(-\frac{10}{9\sqrt{3}} \right) \left[\frac{y^4}{4} \right]_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{0}$$

$$I_{33} = 2\rho \left(-\frac{10}{9\sqrt{3}} \right) \left[-\frac{1}{4} \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^4 \right]$$

$$I_{33} = 2\rho \left(-\frac{10}{9\sqrt{3}} \right) \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{9a^4}{16} \right) \right]$$

$$I_{33} = \frac{5\rho}{16\sqrt{3}} a^4$$

$$I_{33} = \frac{5a^4}{16\sqrt{3}} \left(\frac{4M}{a^2\sqrt{3}} \right)$$

$$I_{33} = \frac{5}{12} M a^2$$

De esta manera ya podemos estimar el lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{5Ma^2}{24}\dot{\theta}^2 + Mg\frac{a\cos\theta}{\sqrt{3}}$$

Ahora aplicamos la ecuación de Euler - Lagrange:

$$\frac{dL}{d\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = 0$$

$$-Mg\frac{a\sin\theta}{\sqrt{3}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{5Ma^2}{12}\dot{\theta}\right) = 0$$

$$-Mg\frac{a\sin\theta}{\sqrt{3}} - \frac{5Ma^2}{12}\ddot{\theta} = 0$$

Ordenamos la ecuación:

$$\frac{5Ma^2}{12}\ddot{\theta} + Mg\frac{a\sin\theta}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{5a^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{ag}{\sqrt{3}}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{5a\sqrt{3}}\sin\theta = 0$$

La aproximación de ángulos pequeños es $\sin\theta \approx \theta$ *por lo que nos quedamos con la ecuación del oscilador armónico simple, donde ya conocemos la frecuencia de oscilación:*

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{5a\sqrt{3}}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{12}{5\sqrt{3}}\frac{g}{a}$$

3. **Un disco delgado esta compuesto por dos mitades conectadas a lo largo de su diámetro. Si una mitad tiene densidad ρ y la otra mitad densidad 2ρ, encuentre el lagrangiano del sistema si el disco rueda sin deslizar a lo largo de la superficie horizontal.**

Para estimar el lagrangiano necesitamos la energía cinética y potencial, para ello es indispensable calcular la posición del centro de masa así como los momentos de inercia respecto al centro geométrico del disco y el centro de masa de este mismo.
Así pues, la siguiente imagen nos muestra los correspondientes sistemas de referencia, uno completamente inercial ubicado sobre el suelo y donde definimos el cero de energía potencial. Por otro lado, ubicamos un segundo sistema de referencia en el centro geométrico del disco, de modo que dicho sistema se mueve junto al disco, siguiendo la condición de no deslizamiento:

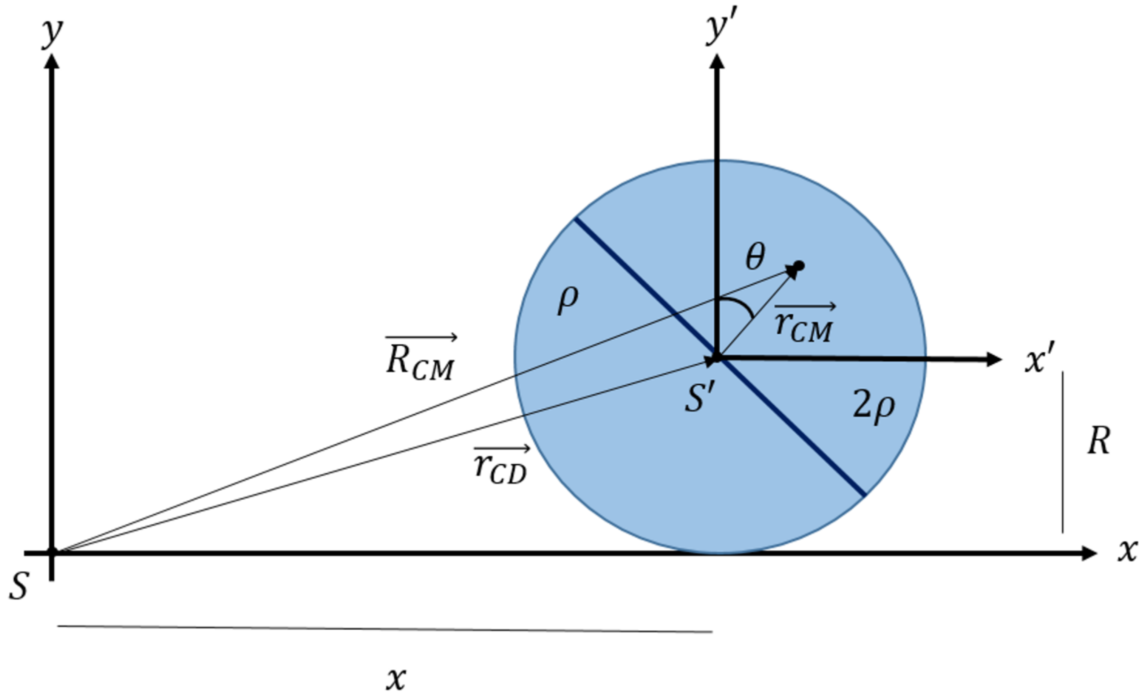

Figura 7: *Tenemos un disco cuya densidad es distinta para cada hemisferio, lo que provoca que el centro de masa este en una posiciona distinta al centro geométrico del circulo.*

Así como lo muestra la imagen el vector $\vec{R_{CM}}$ *nos indica la posición del centro de masa del disco respecto al sistema inercial* S *que esta en el suelo, por otra parte, el vector* $\vec{r_{CD}}$ *nos indica la posición del centro geométrico del disco respecto al mismo sistema* S*, finalmente el vector* $\vec{r_{CM}}$ *nos da la posición del centro de masa respecto al sistema* S' *ubicado en el centro del disco, siendo así tenemos que:*

$$\vec{R_{CM}} = \vec{r_{CD}} + \vec{r_{CM}}$$

Donde por la condición de rodadura tendremos que:

$$\vec{r_{CD}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\theta \\ R \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_{CM}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\sin\theta \\ d\cos\theta \end{pmatrix}$$

Y donde d *representa la distancia del centro del disco al centro de masa, es decir, tenemos que* $||\vec{r_{CM}}|| = d$ *, distancia que calcularemos mas delante.*
Así pues, como bien sabemos el lagrangiano es:

$$L = T - U$$

La energía cinética se compone de la energía cinética de rotación K_{Rot} *y la energía cinética de traslación* K_{Tras}*, entonces tenemos:*

$$T = K_{Tras} + K_{Rot}$$

$$= \frac{1}{2}M||\vec{v}||^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2$$

El momento de inercia respecto al centro de masa queda representado por I_{CM} y el vector de velocidad del centro de masa esta dado por:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}R_{CM} = \frac{d}{dt}\left(r_{\vec{CD}} + r_{\vec{CM}}\right) = \frac{d}{dt}r_{\vec{CD}} + \frac{d}{dt}r_{\vec{CM}}$$

$$= \begin{pmatrix} R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d\cos\theta\dot{\theta} \\ -d\sin\theta\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\theta}\begin{pmatrix} R + d\cos\theta \\ -d\sin\theta \end{pmatrix}$$

De manera que:

$$||\vec{v}||^2 = \dot{\theta}^2\left[(R + d\cos\theta)^2 + (-d\sin\theta)^2\right]$$

$$= \dot{\theta}^2\left[R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right]$$

Entonces la energía cinética queda determinada por:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left[R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right] + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2$$

Por otra parte, la energía potencial estará dada por:

$$U = Mgy$$

$$U = Mg(R + d\cos\theta)$$

Y el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left[R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right] + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - mg(R + d\cos\theta)$$

Ahora solo nos resta calcular la masa total M del disco, la distancia d al centro de masa y el momento de inercia I_{CM} respecto al centro de masa, y sustituir en la expresión obtenida para el lagrangiano.

Comencemos por determinamos la masa total:

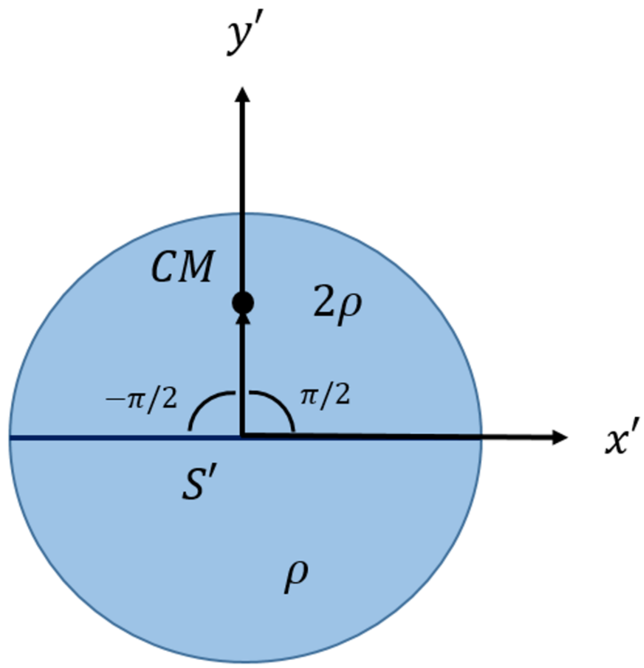

Figura 8: *Inicialmente tendremos el disco con el hemisferio mas denso en la parte de arriba, por lo que el centro de masa estará desplazado en esa dirección.*

$$M = \int \rho dA$$

$$\rho_{(\theta)} = \begin{cases} \rho & -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 2\rho & \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$$

$$M = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \rho r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^R 2\rho r dr d\theta$$

$$M = \pi\rho \int_0^R r dr + 2\pi\rho \int_0^R r dr$$

$$M = \pi\rho\frac{R^2}{2} + 2\pi\rho\frac{R^2}{2} = \frac{3\pi R^2}{2}\rho$$

La posición del centro de masa sabemos que inicialmente estará sobre el eje y por lo que nos limitamos a calcular esa componente:

$$r_{\vec{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\rho_{(\theta)} dA$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$r_y = \frac{1}{M}\int y\rho_{(\theta)}dA = \frac{1}{M}\int r\cos\theta\rho_{(\theta)}rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{M}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R 2r^2\cos\theta\rho drd\theta + \frac{1}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^R r^2\cos\theta\rho drd\theta$$

$$= \frac{2}{M}\frac{R^3}{3}\rho\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta + \frac{1}{M}\frac{R^3}{3}\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{M}\frac{R^3}{3}\rho\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{1}{M}\frac{R^3}{3}\rho\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{M}\frac{R^3}{3}\rho\left(1-(-1)\right) + \frac{1}{M}\frac{R^3}{3}\rho\left(-1-1\right)$$

$$= \frac{1}{M}\frac{4R^3}{3}\rho - \frac{1}{M}\frac{2R^3}{3}\rho = \frac{1}{M}\frac{2R^3}{3}\rho$$

$$= \frac{2}{3\pi\rho R^2}\frac{2R^3}{3}\rho = \frac{4R}{9\pi}$$

Ahora determinamos el momento de inercia respecto al centro geométrico, recordando que el origen del sistema de referencia S' esta en el centro del disco:

$$I_3 = \int \rho_{(\theta)}(x^2+y^2)dA$$

$$= \int \rho_{(\theta)}(r^2)rdrd\theta$$

$$= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R 2\rho(r^3)drd\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^R \rho(r^3)drd\theta$$

$$= \frac{2\pi R^4}{4}\rho + \frac{\pi R^4}{4}\rho = \frac{3}{4}\pi\rho R^4$$

Pero como bien sabemos:

$$M = \frac{3\pi R^2}{2}\rho$$

$$\rho = \frac{2M}{3\pi R^2}$$

$$I_3 = \frac{3}{4}\pi R^4 \left(\frac{2M}{3\pi R^2}\right)$$

$$I_3 = \frac{MR^2}{2}$$

Ahora usamos el teorema de los ejes paralelos para estimar el momento de inercia respecto al centro de masa:

$$J_3 = I_3 - M(a_1^2 + a_2^2) = \frac{MR^2}{2} - M(\frac{4R}{9\pi})^2$$

$$J_3 = I_{CM} = \frac{MR^2}{2} - \frac{16MR^2}{81\pi^2}$$

Ahora remplazamos los valores obtenidos en la expresión para el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left[R^2 + d^2 + 2Rd\cos\theta\right] + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\theta}^2 - Mg(R + d\cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left[R^2 + \left(\frac{4R}{9\pi}\right)^2 + 2R\left(\frac{4R}{9\pi}\right)\cos\theta\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} - \frac{16MR^2}{81\pi^2}\right)\dot{\theta}^2 - Mg\left[R + \left(\frac{4R}{9\pi}\right)\cos\theta\right]$$

$$L = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left(\frac{16MR^2}{81\pi^2}\right) + MR\dot{\theta}^2\left(\frac{4R}{9\pi}\right)\cos\theta + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2\left(\frac{16MR^2}{81\pi^2}\right) - ...$$

$$... - Mg\left[R + \left(\frac{4R}{9\pi}\right)\cos\theta\right]$$

$$L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + MR\dot{\theta}^2\left(\frac{4R}{9\pi}\right)\cos\theta - Mg\left[R + \left(\frac{4R}{9\pi}\right)\cos\theta\right]$$

$$L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{4MR}{9\pi}\left(R\dot{\theta}^2 - g\right)\cos\theta - MRg$$

$$L = MR\left[\frac{3}{4}R\dot{\theta}^2 + \frac{4}{9\pi}\left(R\dot{\theta}^2 - g\right)\cos\theta - g\right]$$