Segundo Examen Parcial de Teoría Electromagnética

Agosto 2024

1. **Determina el potencial en el interior de una placa bidimensional con las siguientes condiciones de contorno:**

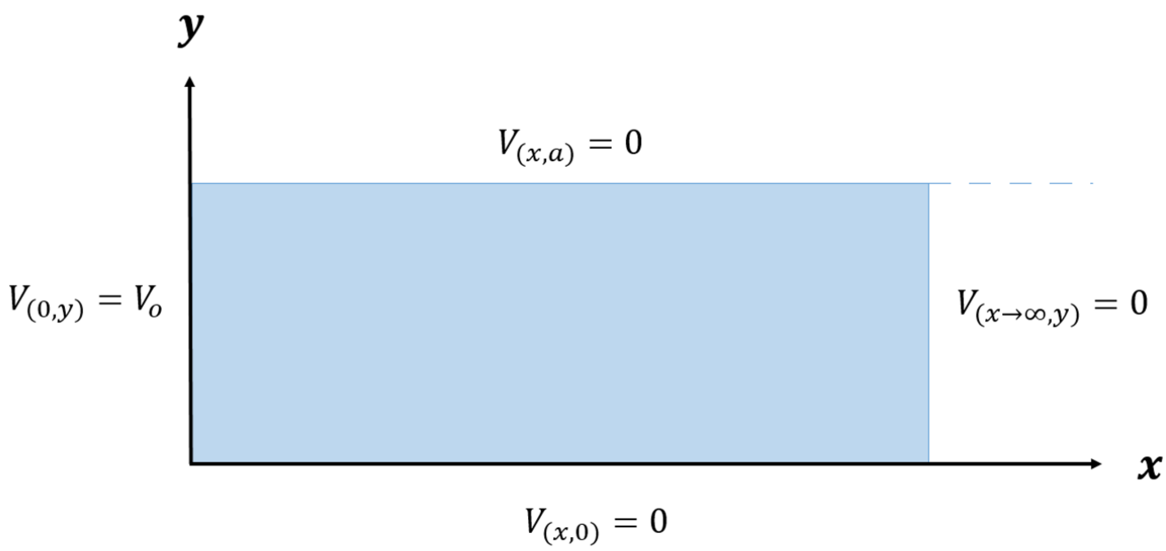

Figura 1: *Consideremos una placa bidimensional conductora semi-infinita sobre el plano xy, cuyo potencial en los bordes es cero, excepto sobre el lado izquierdo en $x = 0$ donde el potencial es un valor V_o constante.*

Se trata de un problema donde la densidad de carga ρ es cero, y el problema consiste entonces en resolver la ecuación de laplace para el potencial $V_{(x,y)}$ y aplicar las condiciones de frontera que se mencionan:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales parciales, se utiliza el método de separación de variables, es decir, el método consiste en proponer que nuestra función de potencial $V_(x, y)$ puede escribirse como el producto de una función unicamente dependiente de la variable x y otra función unicamente dependiente de la variable y, es decir, el potencial es de la forma:

$$V_{(x,y)} = X_{(x)} Y_{(y)}$$

De esta manera si sustituimos $V_{(x,y)}$ en la ecuación de laplace, las correspondientes derivadas parciales se convierten en derivadas ordinarias:

$$Y_{(y)}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}+X_{(x)}\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}=0$$

Dividimos entre $X_{(x)}Y_{(y)}$ y la ecuación se transforma en:

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}+\frac{1}{Y_{(y)}}\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}=0$$

Ahora bien, fijémonos en que tanto el primer termino como el segundo son funciones unicamente dependientes de la variable x y de la variable y correspondientemente:

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}=f_{(x)}$$

$$\frac{1}{Y_{(y)}}\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}=g_{(y)}$$

Es decir, en cierta forma es como si tuviéramos que una función de la variable x es igual a otra función de la variable y:

$$f_{(x)}+g_{(y)}=0$$

Lo cual solo es posible cuando estas funciones son una constante:

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}=f_{(x)}=k_1$$

$$\frac{1}{Y_{(y)}}\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}=g_{(y)}=k_2$$

$$-k_1=k_2$$

De esta manera logramos separar la ecuación diferencial original en dos ecuaciones diferenciales independientes, una para la variable x y otra para la variable y:

$$\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}-k_1X_{(x)}=0$$

$$\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}+k_1Y_{(y)}=0$$

Si $k_1=k^2$ es fácil ver que la ecuación diferencial para y se trata del oscilador armónico, mientras que la ecuación diferencial para x tiene su solución como exponenciales o bien *con las funciones trigonométricas hiperbólicas* $\sinh x$ *y* $\cosh x$*; en este caso nos conviene escoger la forma con exponenciales, ya que evaluaremos en* $x - \infty$ *y tenemos entonces:*

$$X_{(x)} = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$Y_{(y)} = C\sin{(ky)} + D\cos{(ky)}$$

Así pues, ahora aplicamos las condiciones de frontera usando que $V_{(x,y)} = X_{(x)}Y_{(y)}$*, para la cara de abajo:*

$$V_{(x,0)} = 0 = X_{(x)}Y_{(0)}$$

$$Y_{(0)} = 0 = C\sin{(0)} + D\cos{(0)}$$

Como $\sin(0) = 0$ *y* $\cos{(0)} = 1$ *para que se cumpla que* $Y_{(0)} = 0$ *tiene que cumplirse que* $D = 0$*. Luego, para la cara de arriba:*

$$V_{(x,a)} = 0 = X_{(x)}Y_{(a)}$$

$$Y_{(a)} = 0 = C\sin{(ka)}$$

Para que se cumpla que $Y_{(a)} = 0$ *entonces* $k = \frac{n\pi}{a}$ *de manera que cuando evaluamos en a nos da cero. Por otra parte para la cara de la derecha, cuando* x *tiende a infinito :*

$$V_{(x=\infty,y)} = 0 = X_{(\infty)}Y_{(y)}$$

$$X_{(\infty)} = 0 = Ae^{k(\infty)} + Be^{-k(\infty)}$$

De manera natural cuando x *tiende a infinito* e^{-kx} *tiende a cero, de modo que la constante* A *debe ser cero, pues* e^{kx} *diverge en el infinito.*
Entonces para algún valor entero n *tenemos que las funciones* $X_{(x)}$ *y* $Y_{(y)}$ *tienen la forma:*

$$X_{(x)} = B_n e^{-kx}$$

$$Y_{(y)} = C_n \sin{(ky)}$$

$$V_{(x,y)} = X_{(x)}Y_{(y)} = A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin{(\frac{n\pi}{a}y)}$$

Donde $A_n = B_n C_n$*. Recordemos que en ecuaciones diferenciales existe el principio de superposición, y la solución mas general de una ecuación diferencial es la suma de todas* *las soluciones que tengamos, entonces nuestra solución las general para $V_{(x,y)}$ es la suma sobre cada valor n entero.*

$$V_{(x,y)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin{(\frac{n\pi}{a}y)}$$

Ahora lo único que nos resta es aplicar la condición de frontera $V_{(0,y)} = V_o$ para estimar la forma de las coeficientes A_n, para ello, utilizaremos la propiedad de originalidad de la función seno, es decir, de la integral:

$$\int_0^a \sin{(\frac{n\pi}{a}y)} \sin{(\frac{m\pi}{a}y)} dy = \begin{cases} a/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

Aplicando la ultima condición de frontera:

$$V_{(0,y)} = V_o = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin{(\frac{n\pi}{a}y)}$$

Aplicando la originalidad del seno y recordando que cuando tenemos la delta δ_{nm} dentro de una suma, debemos quitar la suma y cambiar el indice:

$$\int_0^a V_o \sin{(\frac{m\pi}{a}y)} dy = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^a \sin{(\frac{n\pi}{a}y)} \sin{(\frac{m\pi}{a}y)} dy = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^a V_o \sin{(\frac{m\pi}{a}y)} dy = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{a}{2}\delta_{nm} = A_m \frac{a}{2}$$

$$A_m = \frac{2}{a} \int_0^a V_o \sin{(\frac{m\pi}{a}y)} dy$$

Resolvemos la integral:

$$A_m = \frac{2}{a} V_o \int_0^a \sin{(\frac{m\pi}{a}y)} dy$$

$$A_m = \frac{2V_o}{a} \frac{a}{m\pi} \left[-\cos{(\frac{m\pi}{a}y)} \right]_0^a = \frac{2V_o}{m\pi} \left[1 - \cos{(m\pi)} \right]$$

$$A_m = \frac{2V_o}{m\pi} \left[1 - (-1)^m \right]$$

Notemos que para los valores pares de m los coeficientes A_m son cero, por lo que en la suma solo tendremos los términos con los valores impares de m, es decir, para los $m = 2k + 1$ los coeficientes de la suma toman los valores:

$$A_k = \frac{4V_o}{(2k+1)\pi}$$

Entonces la solución final a la ecuación de laplace con estas condiciones de frontera concretas esta dada por:

$$V_{(x,y)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4V_o}{(2k+1)\pi} \right] e^{-\frac{(2k+1)\pi}{a}x} \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{a} y \right]$$

2. **Determina el potencial en el interior de un paralelepípedo con las siguientes condiciones de contorno:**

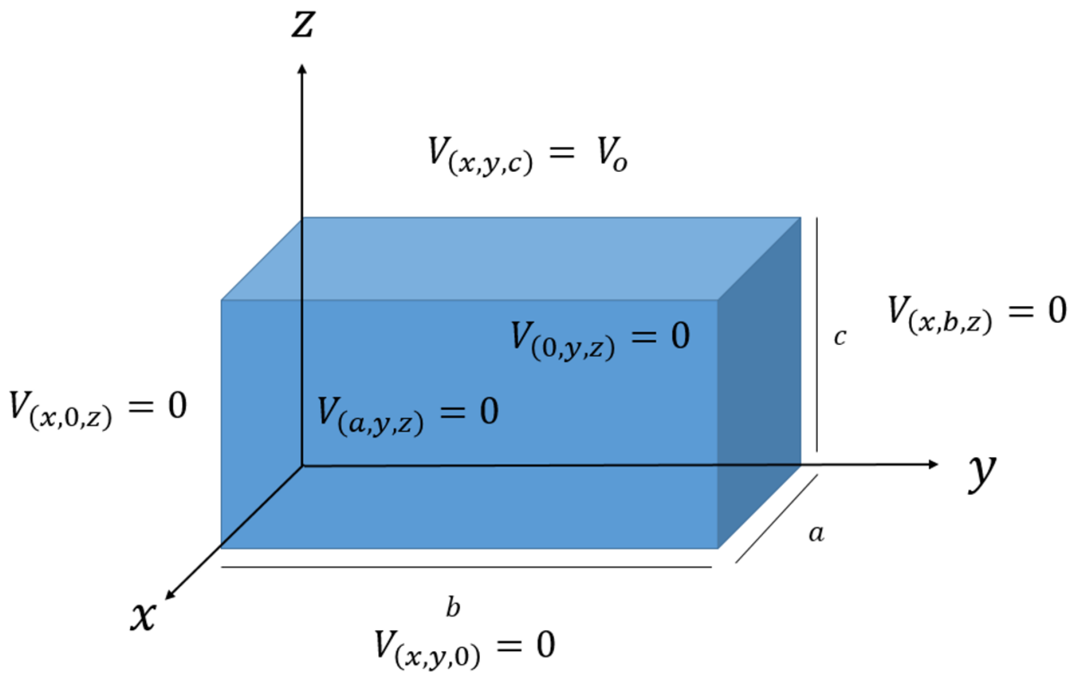

Figura 2: *Consideremos un paralelepípedo conductor cuyo potencial en la cara superior tiene un valor V_o constante, mientras que en todas las demás caras el potencial es cero.*

El problema es bastante similar al anterior, con la diferencia de que ahora debemos resolver la ecuación de laplace en tres dimensiones.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Nuevamente usaremos el método de separación de variables:

$$V_{(x,y,z)} = X_{(x)} Y_{(y)} Z_{(z)}$$

$$Y_{(y)} Z_{(z)} \frac{d^2 X_{(x)}}{dx^2} + X_{(x)} Z_{(z)} \frac{d^2 Y_{(y)}}{dy^2} + X_{(x)} Y_{(y)} \frac{d^2 Z_{(z)}}{dz^2} = 0$$

Dividimos entre $X_{(x)}Y_{(y)}Z_{(z)}$*:*

$$\frac{1}{X_{(x)}}\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}+\frac{1}{Y_{(y)}}\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}+\frac{1}{Z_{(z)}}\frac{d^2Z_{(z)}}{dz^2}=0$$

$$k_x+k_y+k_z=0$$

$$k_z=-(k_x+k_y)$$

Si tomamos que $k_x=-\alpha^2$ *y* $k_y=-\beta^2$ *entonces* $k_z=(\alpha^2+\beta^2)$

$$\frac{d^2X_{(x)}}{dx^2}+\alpha^2X_{(x)}=0$$

$$\frac{d^2Y_{(y)}}{dy^2}+\beta^2Y_{(y)}=0$$

$$\frac{d^2Z_{(z)}}{dz^2}-(\alpha^2+\beta^2)Z_{(z)}=0$$

Y las correspondientes soluciones son:

$$X_{(x)}=A\sin{(\alpha x)}+B\cos{(\alpha x)}$$

$$Y_{(y)}=C\sin{(\beta y)}+D\cos{(\beta x)}$$

$$Z_{(z)}=E\sinh{(\Gamma y)}+F\cosh{(\Gamma x)}$$

Donde $\Gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.
Luego, aplicamos las condiciones de frontera sobre x*:*

$$V_{(0,y,z)}=0=X_{(0)}Y_{(y)}Z_{(z)}$$

$$X_{(0)}=0=A\sin{(0)}+B\cos{(0)}$$

Como $\sin{(0)}=0$ *y* $\cos{(0)}=1$ *entonces* $B=0$ *para que se cumpla la igualdad.*

$$V_{(a,y,z)}=0=X_{(a)}Y_{(y)}Z_{(z)}$$

$$X_{(0)}=0=A\sin{(\alpha a)}$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}$$

Ahora aplicamos las condiciones de frontera sobre y:

$$V_{(x,0,z)} = 0 = X_{(x)}Y_{(0)}Z_{(z)}$$

$$Y_{(0)} = C\sin(0) + D\cos(0)$$

Como $\sin(0) = 0$ *y* $\cos(0) = 1$ *entonces* $D = 0$ *para que se cumpla la igualdad.*

$$V_{(x,b,z)} = 0 = X_{(x)}Y_{(b)}Z_{(z)}$$

$$Y_{(b)} = 0 = C\sin(\beta b)$$

$$\beta = \frac{m\pi}{b}$$

De modo que:

$$\Gamma_{nm} = \sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2}$$

Por otra parte las condiciones de frontera para z nos dan:

$$V_{(x,y,0)} = X_{(x)}Y_{(y)}Z_{(0)}$$

$$Z_{(0)} = E\sinh(0) + F\cosh(0)$$

Como $\sinh(0) = 0$ *y* $\cosh(0) = 1$ *entonces* $F = 0$ *para que se cumpla la igualdad.*

Nuevamente la solución general esta dada por la suma sobre cada valor entero de n y m es decir:

$$V_{(x,y,z)} = \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(\Gamma_{nm}z)$$

Aplicamos la ultima condición de frontera:

$$V_{(x,y,c)} = V_o = \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sinh(\Gamma_{nm}c)$$

Ahora usamos la originalidad de las funciones trigonométricas, para determinar la forma de los coeficientes A_{nm}, es decir:

$$\int_0^a \sin{(\frac{n\pi}{a}x)}\sin{(\frac{n'\pi}{a}x)}dx = \begin{cases} a/2 & n' = n \\ 0 & n' \neq n \end{cases} = \frac{a}{2}\delta_{nn'}$$

$$\int_0^b \sin{(\frac{m\pi}{b}y)}\sin{(\frac{m'\pi}{b}y)}dy = \begin{cases} b/2 & m' = m \\ 0 & m' \neq m \end{cases} = \frac{b}{2}\delta_{mm'}$$

Entonces:

$$\int_0^a \int_0^b V_o \sin{(\frac{n'\pi}{a}x)}\sin{(\frac{m'\pi}{b}y)}dxdy = \sum_{n,m}^{\infty} A_{nm}\sinh{(\Gamma_{nm}c)}\frac{a}{2}\delta_{nn'}\frac{b}{2}\delta_{mm'}$$

$$\int_0^a \int_0^b V_o \sin{(\frac{n'\pi}{a}x)}\sin{(\frac{m'\pi}{b}y)}dxdy = A_{n'm'}\sinh{(\Gamma_{n'm'}c)}\frac{a}{2}\frac{b}{2}$$

Por comodidad usamos nuevamente n y m en lugar de n' y m'.

$$A_{nm} = \frac{4V_o}{ab\sinh{(\Gamma_{nm}c)}}\int_0^a \int_0^b \sin{(\frac{n\pi}{a}x)}\sin{(\frac{m\pi}{b}y)}dxdy$$

Realizamos la integral doble:

$$\int_0^a \int_0^b \sin{(\frac{n\pi}{a}x)}\sin{(\frac{m\pi}{b}y)}dxdy = \frac{a}{n\pi}\left[-\cos{(\frac{n\pi}{a}x)}\right]_0^a \frac{b}{m\pi}\left[-\cos{(\frac{m\pi}{b}y)}\right]_0^b$$

$$\int_0^a \int_0^b \sin{(\frac{n\pi}{a}x)}\sin{(\frac{m\pi}{b}y)}dxdy = \frac{ab}{nm\pi^2}\left[1-\cos{(n\pi)}\right]\left[1-\cos{(m\pi)}\right]$$

$$A_{nm} = \frac{4V_o}{nm\pi^2\sinh{(\Gamma_{nm}c)}}\left[1-\cos{(n\pi)}\right]\left[1-\cos{(m\pi)}\right]$$

$$A_{nm} = \frac{4V_o}{nm\pi^2\sinh{(\Gamma_{nm}c)}}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right]$$

Nuevamente fijémonos en que cuando n y m toman valores par, los coeficientes A_{nm} se anulan, por lo que solo nos quedan los coeficientes con valores de n y m impar, es decir, cuando $n = 2k+1$ y $m = 2j+1$ entonces nuestros coeficientes ahora son de la forma:

$$A_{kj} = \frac{16V_o}{(2k+1)(2j+1)\pi^2\sinh{(\Gamma_{kj}c)}}$$

Donde ahora Γ_{kj} es de la forma:

$$\Gamma_{kj} = \sqrt{\left[\frac{(2k+1)\pi}{a}\right]^2 + \left[\frac{(2j+1)\pi}{b}\right]^2}$$

Y la solución final es entonces:

$$V_{(x,y,z)} = \sum_{k,j}^{\infty} \left[\frac{16V_o}{(2k+1)(2j+1)\pi^2 \sinh(\Gamma_{kj}c)}\right] \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{a}x\right] \sin\left[\frac{(2j+1)\pi}{b}y\right] \sinh(\Gamma_{kj}z)$$

3. **El potencial en una esfera de radio R esta dado por:**

$$V_{(\theta)} = k\cos(3\theta)$$

Donde k es una constante, encuentre el potencial dentro y fuera de la esfera.

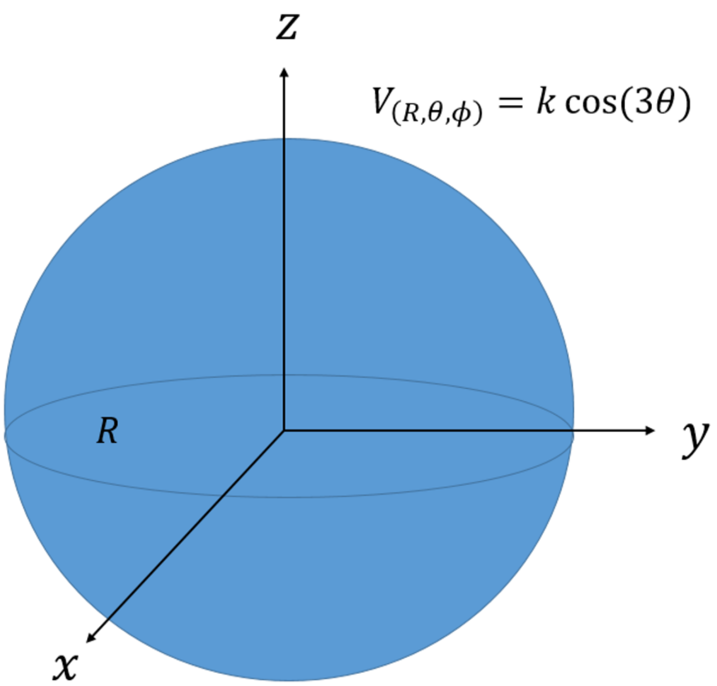

Figura 3: *Tenemos ahora una esfera conductora, que sobre su superficie tiene un potencial de la forma $V_{(\theta)} = k\cos(3\theta)$ con k una constante.*

Ahora nuestro problema se resume a resolver la ecuación de laplace en coordenadas esféricas, para luego aplicar las correspondientes condiciones de frontera, para ello como ya bien sabemos utilizamos el método de separación de variables:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\right) = 0$$

$$V_{(r,\theta,\phi)} = R_{(r)}U_{(\theta)}P_{(\phi)}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dR_{(r)}}{dr}U_{(\theta)}P_{(\phi)}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}R_{(r)}P_{(\phi)}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}R_{(r)}U_{(\theta)}\right)=0$$

Dividimos entre $R_{(r)}U_{(\theta)}P_{(\phi)}$ *y multiplicamos por* r^2 *para obtener:*

$$\frac{1}{R_{(r)}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dR_{(r)}}{dr}\right)+\frac{1}{U_{(\theta)}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right)+\frac{1}{P_{(\phi)}\sin^2\theta}\left(\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}\right)=0$$

Ahora vemos que el primer termino es una función unicamente dependiente de la variable r *por lo que este término debe ser algún valor constante:*

$$f_{(r)}=\frac{1}{R_{(r)}}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{(r)}}{dr}\right)=\alpha$$

$$\frac{1}{U_{(\theta)}\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right)+\frac{1}{P_{(\phi)}\sin^2\theta}\left(\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}\right)=-\alpha$$

Ahora reescribimos y multiplicamos por $\sin^2(\theta)$ *y tenemos:*

$$\frac{\sin\theta}{U_{(\theta)}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right)+\alpha\sin^2\theta+\frac{1}{P_{(\phi)}}\left(\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}\right)=0$$

Vemos que:

$$g_{(\theta)}=\frac{\sin\theta}{U_{(\theta)}}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right)+\alpha\sin^2\theta=\beta$$

$$h_{(\phi)}=\frac{1}{P_{(\phi)}}\left(\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}\right)=-\beta$$

Ahora dividimos entre $\sin^2(\theta)$ *y multiplicamos por* $U_{(\theta)}$ *a la función* $g_{(\theta)}$ *y reescribimos:*

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right)+\alpha U_{(\theta)}-\frac{\beta U_{(\theta)}}{\sin^2\theta}=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right)+\left(\alpha-\frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)U_{(\theta)}=0$$

Luego para $h_{(\phi)}$ *tenemos que:*

$$\frac{1}{P_{(\phi)}}\left(\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}\right)=-\beta$$

$$\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2}+\beta P_{(\phi)}=0$$

De esta manera obtenemos las tres ecuaciones diferenciales para cada función $R_{(r)}$, $U_{(\theta)}$ y $P_{(\phi)}$ separadas y completamente independientes de las demás variables:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{(r)}}{dr}\right) - \alpha R_{(r)} = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)U_{(\theta)} = 0$$

$$\frac{d^2P_{(\phi)}}{d\phi^2} + \beta P_{(\phi)} = 0$$

Una manera de simplificar la solución, es considerar el caso donde $P_{(\phi)}$ es constante, es decir, el caso donde hay simetría acimutal, o bien, cuando el potencial no depende del angulo ϕ, así pues implica que $\beta = 0$ y el potencial es de la forma:

$$V_{(r,\theta)} = R_{(r)}U_{(\theta)}$$

Y nuestro problema se limita a estas dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{(r)}}{dr}\right) - \alpha R_{(r)} = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU_{(\theta)}}{d\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)U_{(\theta)} = 0$$

Comencemos con la ecuación angular, realizamos el cambio de variable $x = \cos\theta$, $P_{(x)} = U_{(\theta)}$ y por tanto $dx = -\sin\theta d\theta$ de donde sabemos que:

$$\frac{d}{d\theta} = -(1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{(x)}}{dx}\right] + \alpha P_{(x)} = 0$$

$$-2x\frac{dP_{(x)}}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2P_{(x)}}{dx^2} + \alpha P_{(x)} = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P_{(x)}}{dx^2} - 2x\frac{dP_{(x)}}{dx} + \alpha P_{(x)} = 0$$

Puede mostrarse luego de usar el método de Frobenius al rededor del cero, y tomando $\alpha = k(k+1)$ en las relaciones de recurrencia, que esta ecuación tiene por solución los llamados polinomios de legendre $P_k(cos\theta)$.
Por otra parte, retomado la ecuación radial:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{(r)}}{dr}\right) - k(k+1)R_{(r)} = 0$$

Igualmente ya que $r = 0$ es un punto singular regular, usando el método de Frobenius al rededor del cero podemos mostrar que la solución mas general para la parte radial, esta dada por:

$$R_{(r)} = A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}}$$

Y la solución general para el potencial con simetría acimutal es:

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k r^k + \frac{B_k}{r^{k+1}}\right)P_k(\cos\theta)$$

Ahora que ya conocemos la solución a la ecuación de laplace en coordenadas esféricas, debemos aplicar la condición de contorno para estimar los coeficientes A_k y B_k para sus correspondientes casos, dentro y fuera de la esfera.
Comenzaremos calculando el potencial dentro de la esfera, para ello debemos hacer $B_k = 0$ ya que estamos interesados en los valores de r acotados por el radio de la esfera, es decir, si evaluáramos el potencial en el limite $r = 0$ el termino con los coeficientes B_k divergiría, ya que estamos dividiendo entre cero.

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k P_k(\cos\theta)$$

$$V_{(R,\theta)} = k\cos 3\theta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k P_k(\cos\theta)$$

$$\cos 3\theta = \cos\left(2\theta + \theta\right)$$

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$$

$$= \left[(\cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)\right]\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Pero nosotros conocemos algunos de los polinomios de Legendre:

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

Entonces la idea es poder escribir $\cos 3\theta$ *como una combinacional lineal de estos polinomios, esto nos va a permitir usas la originalidad de los polinomios de Legendre a la hora de estimar los coeficientes:*

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = AP_1(\cos\theta) + BP_3(\cos\theta)$$

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = A\cos\theta + \frac{1}{2}B(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$A = -\frac{3}{5}$$

$$B = \frac{8}{5}$$

Entonces:

$$V_{(\theta)} = k\left[-\frac{3}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{8}{5}P_3(\cos\theta)\right]$$

Ahora si usamos la originalidad de los polinomios de Legendre a la vez que aplicamos la condición de frontera:

$$V_{(R,\theta)} = k\cos 3\theta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k P_k(\cos\theta)$$

La originalidad es:

$$\int_0^\pi P_j(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} = \frac{2}{2k+1}\delta_{kj}$$

$$\int_0^\pi V_{(\theta)}P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \int_0^\pi P_j(\cos\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$\int_0^\pi V_{(\theta)}P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \frac{2}{2k+1}\delta_{kj}$$

$$\int_0^\pi V_{(\theta)}P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta = A_j R^j \frac{2}{2j+1}$$

$$A_j = \frac{2j+1}{2R^j}\int_0^\pi V_{(\theta)}P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$A_j = \frac{2j+1}{2R^j}\int_0^\pi k\left[-\frac{3}{5}P_1(\cos\theta)+\frac{8}{5}P_3(\cos\theta)\right]P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$A_j = \frac{2j+1}{2R^j}k\left[-\frac{3}{5}\left(\int_0^\pi P_1(\cos\theta)P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right)+\frac{8}{5}\left(\int_0^\pi P_3(\cos\theta)P_j(\cos\theta)\sin\theta d\theta\right)\right]$$

$$A_j = \frac{2j+1}{2R^j}k\left[-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{2j+1}\delta_{j1}\right)+\frac{8}{5}\left(\frac{2}{2j+1}\delta_{j3}\right)\right]$$

$$A_j = \frac{k}{R^j}\left[-\frac{3}{5}\delta_{j1}+\frac{8}{5}\delta_{j3}\right]$$

Sustituimos los coeficientes A_j en la suma y aplicamos las deltas sobre esta misma:

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty}A_k r^k P_k(\cos\theta)$$

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{k}{R^j}\left[-\frac{3}{5}\delta_{j1}+\frac{8}{5}\delta_{j3}\right]r^jP_j(\cos\theta)$$

$$V_{(r,\theta)} = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{3k}{5}\frac{r^j}{R^j}P_j(\cos\theta)\delta_{j1}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{8k}{5}\frac{r^j}{R^j}P_j(\cos\theta)\delta_{j3}$$

$$V_{(r,\theta)} = -\frac{3k}{5}\frac{r}{R}P_1(\cos\theta)+\frac{8k}{5}\frac{r^3}{R^3}P_3(\cos\theta)$$

$$V_{(r,\theta)} = -\frac{3k}{5}\frac{r}{R}\cos\theta+\frac{8k}{5}\frac{r^3}{R^3}\left[\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)\right]$$

Finalmente obtenemos:

$$V_{(r,\theta)} = \frac{k}{5}\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta\left[4\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(5\cos^2\theta-3\right)-3\right]$$

Ahora bien, para estimar el potencial fuera de la esfera, nos interesamos en las regiones de r mayores al radio, por lo que si ahora evaluáramos el potencial en $r=\infty$ el termino con el coeficiente A_k es el que diverge, entonces debemos hacer $A_k = 0$ y nuestra expresión para el potencial se reduce a:

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k r^k+\frac{B_k}{r^{k+1}}\right)P_k(\cos\theta)$$

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{r^{k+1}} P_k(\cos\theta)$$

$$\int_0^{\pi} V_{(\theta)} P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^{-k-1} \int_0^{\pi} P_j(\cos\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi} V_{(\theta)} P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} B_k R^{-k-1} \frac{2}{2k+1} \delta_{kj}$$

$$\int_0^{\pi} V_{(\theta)} P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta = B_j R^{-j-1} \frac{2}{2j+1}$$

$$B_j = \frac{2j+1}{2} R^{j+1} \int_0^{\pi} V_{(\theta)} P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$B_j = \frac{2j+1}{2} R^{j+1} k \left[-\frac{3}{5} \left(\frac{2}{2j+1} \delta_{j1} \right) + \frac{8}{5} \left(\frac{2}{2j+1} \delta_{j3} \right) \right]$$

$$B_j = k R^{j+1} \left[-\frac{3}{5} \delta_{j1} + \frac{8}{5} \delta_{j3} \right]$$

Ahora sustituimos B_j en el potencial:

$$V_{(r,\theta)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k R^{j+1}}{r^{k+1}} \left[-\frac{3}{5} \delta_{j1} + \frac{8}{5} \delta_{j3} \right] P_j(\cos\theta)$$

$$V_{(r,\theta)} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3k}{5} \frac{R^{j+1}}{r^{j+1}} P_j(\cos\theta) \delta_{j1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8k}{5} \frac{R^{j+1}}{r^{j+1}} P_j(\cos\theta) \delta_{j3}$$

$$V_{(r,\theta)} = -\frac{3k}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_1(\cos\theta) + \frac{8k}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_3(\cos\theta)$$

$$V_{(r,\theta)} = -\frac{3k}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos\theta + \frac{8k}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^4 \left[\frac{1}{2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \right]$$

Finalmente obtenemos:

$$V_{(r,\theta)} = \frac{k}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos\theta \left[4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(5\cos^2\theta - 3 \right) - 3 \right]$$

En general si el potencial en la superficie fuera una función mas compleja, siempre podemos hacer una expansión en polinomios de Legendre similar a cuando expandimos una función en series de Fourier, lo cual nos permite utilizar la originalidad de los polinomios.